

Murat Rüzgar Poyraz

Lineer Cebir ve Uygulamaları

## Önsöz

Lineer Cebire hoş geldiniz. Adı üstünde bir “cebir” kitabı okumaktasınız. Fakat kitap içeriği, yeni başlayanların da anlayacağı şekilde olmalı. Bunu ne kadar yapabildiğimdir bilmiyorum. Herkesin her şeyi anlama yöntemi aynı değil ya! Bu notlarda garip sembollerden kaçınmaya çalışarak daha gelenekselci sembollerle ilerleyeceğiz. Örneğin, “+” bu bizim toplama sembolümüz. Bu değil “T”. Her nasıl  $3 T 4 = 7$  değil de  $3 + 4 = 7$  yazıyorsak biz de onu yapacağız. Cebir konuları soyut kavramlardan oluşur. Bunu ne kadar somut hale getirebiliriz? Onu pek bilemiyorum. Olabildiğince uygulama yazmak istedim. Sorarsınız ya; bunlar ne işimize yarayacak diye! Heh! O yüzden bol bol teori ve uygulama göreceksiniz. İyi okumalar.

**Ufak Bir Not:** Bazı altbölümlerin egzersizleri yok. Bu notlar güncellendiğinde daha fazla egzersiz eklenecektir.

# İçindekiler

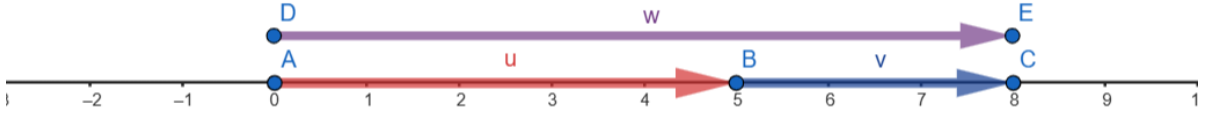
<b>1 Giriş</b>	<b>4</b>
1.1 Vektörler . . . . .	4
1.2 Gruplar . . . . .	6
1.3 Vektör Uzayları . . . . .	10
1.4 Altuzaylar . . . . .	13
<b>2 Taban ve Boyut</b>	<b>17</b>
2.1 Üreteç Kümesi . . . . .	17
2.2 Doğrusal Bağımsızlık . . . . .	20
2.3 Taban . . . . .	22
2.4 Boyut . . . . .	29
<b>3 Doğrusal Dönüşümler</b>	<b>34</b>
3.1 Homomorfizmalar . . . . .	34
3.2 Çekirdek . . . . .	43
3.3 Matrisler . . . . .	48
3.4 Dual Uzay . . . . .	56
3.5 Taban Geçiş Matrisleri . . . . .	61
3.6 Çoklu Doğrusal Formlar . . . . .	64
3.7 Determinant . . . . .	72
<b>4 İç Çarpım Uzayları</b>	<b>76</b>
4.1 Geometriye Giriş . . . . .	76
4.2 İç Çarpım Uzayları . . . . .	80
4.3 Normlu Uzaylar . . . . .	87
4.4 İç Çarpım Uzaylarında Diziler . . . . .	101
4.5 Yalancı Ters (Pseudoinverse) . . . . .	114
<b>5 Özdeğerler ve Özvektörler</b>	<b>118</b>
5.1 Temel Tanımlar . . . . .	118
5.2 Karakteristik Polinom . . . . .	123
5.3 Üst-Üçgensel Matrisler . . . . .	125
<b>6 İç Çarpım Uzaylarında Operatörler</b>	<b>129</b>
6.1 Eşlenik Operatörler . . . . .	129
6.2 Özeşlenik Operatörler . . . . .	133
6.3 İzometrilere . . . . .	135
6.4 Spektral Teorem . . . . .	142

# 1 Giriş

## 1.1 Vektörler

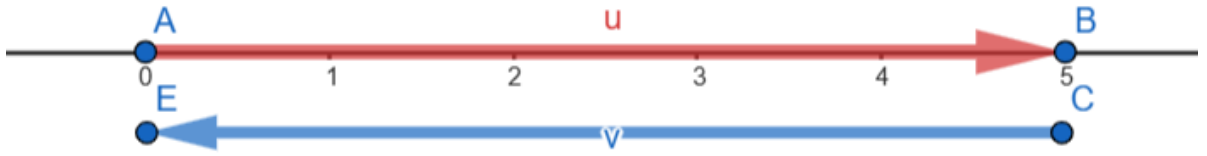
Lineer cebirin çalışacağı konulardan biri vektörlerdir. Daha doğrusu, “vektör uzayı” şeklinde adlandıracağımız nesnelere ve bu nesnelere arasındaki ilişkiyi. Çok soyut geldiğinin farkındayım. Bunu somutlaştıralım: Boyut ve vektör kavramını anlamaya çalışalım. Bir boyutlu uzay deyince ne anlıyorsunuz? Düz bir çizgi... Bir boyutlu uzaylar bazen akla ilk geldiği gibi bir doğrudan oluşur, bazen de sadece iki noktadan. Biz şimdilik doğru üzerinde hareket edebildiğimiz bir senaryoyu düşünelim. Düz bir çizgi üzerinde sadece ileri ve geri hareket edebiliyoruz.

Yapabileceklerimizi düşünelim, örneğin 5 birim ileri hareket edebiliriz. Bulduğumuz yerden 3 birim daha ileri gidersek başlangıç noktamızdan 8 birim ileri gitmiş oluruz.



Şekil 1: Doğru üzerinde 5 + 3 birimlik hareket

İşte bu! Artık uzayımızda toplama yapabiliyoruz. Bunu tarif etmek için  $\vec{3} + \vec{5} = \vec{8}$  gösterimini kullanacağız. Eğer doğru üzerinde 5 birim ileri ve 5 birim geri gitseydik bunu  $\vec{5} + \vec{-5}$  olarak gösterecektik. Tahmin ettiğiniz üzere bu, sıfır birimlik bir harekete denk geliyor.



Şekil 2: Sıfır birimlik hareket: 5 gidiş ve 5 geliş

Bakalım elimizde neler var:

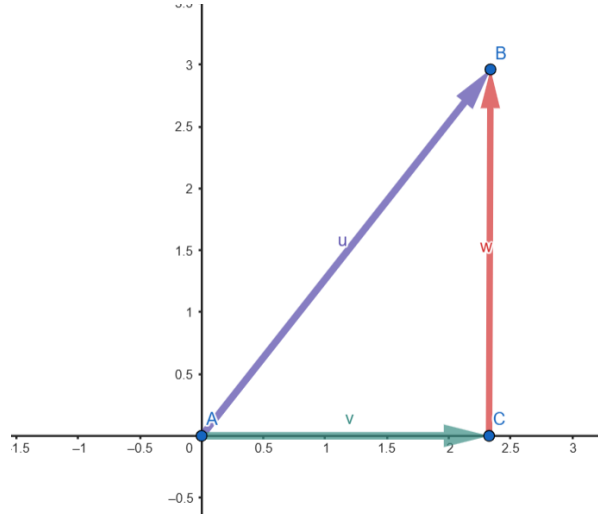
1. “a” birimlik öteleme için  $\vec{a}$  gibi bir gösterim kullandık. Eğer ters yönü ifade etmek istiyorsak  $\vec{-a}$  gibi bir notasyon tercih ettik.

2.  $a$  birim ve  $-a$  birim gitmek birbirini sönümlendiriyor, yani  $\vec{a} + \vec{-a} = \vec{0}$  oluyor.
3. Tahmin edildiği üzere sıfır birim hareket etmek hiç hareket etmemek anlamına geliyor. Yani,  $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$ .

Buradaki olası tüm hareketleri bir kümeyle toplayalım:

$$X = \{\dots, \vec{-2}, \vec{-1}, \vec{0}, \vec{1}, \vec{2}, \dots\}.$$

Bu kümeyle vektör uzayı ismini vereceğiz. Vektör uzayları her zaman somutlaştırılabilen şeyler değildir. Şimdilik düz bir doğru üzerinde hareket hayal ettik. Bu hareketi bir iki boyutlu, ya da üç boyutlu bir uzayda da yapabiliriz. İki boyutlu bir uzayda genelde her vektörün yatay ve dikey bileşeni vardır ve şu şekilde görünürler: Yani A noktasından



Şekil 3: İki boyutlu bir vektör

B noktasına giden bir yer değiştirmeyi, A'dan önce C'ye yatay bir biçimde ve sonrasında C'den B'ye dikey bir şekilde gösterebiliriz. Yani  $u$  vektörünü  $v + w$  şeklinde yazardık. Vektörün dikey uzunluğu  $a$  ve yatay uzunluğu  $b$  olmak üzere bu vektörü  $(a, b)$  şeklinde gösterelim. Toplama işleminin matematikçe  $(a, b) = (a, 0) + (0, b)$  olarak göstermiş olduk. Böylece vektörler üzerinde yine bir toplama işlemimiz olmuş oldu.

Biz bu hareketi düzlemde yaptık yapmasına ama bir çember veya küre üstünde de yapabiliriz ya da tamamen rastgele verilmiş bir  $f(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sürekli fonksiyonu üzerinde de yapabiliriz. Hatta vektör uzayı dediğimiz şey belirli “okların” oluşturduğu bir küme bile olmak zorunda değil. Bu açıdan bakıldığında vektörleri ok olarak görmek hatalı bir tanım olur. O yüzden olabildiğince genel bir vektör uzayı tanımı yapacağız. Gerekirse olabildiğince soyutlayacağız kendimizi. Sonuçta hemen hemen hepimiz toplama yapmayı elma sayarak öğrendik fakat ileri seviyelerde toplama işlemi “elma” saymaktan çıkarıp kağıt üstünde yapmaya başladık. Vektör uzaylarını da öyle düşünün. Her ne kadar oklar üzerinden bir sezgi kazandırmaya çalışsak da çalıştığımız her şey soyut olacak. Buna cebirin temel kavramlarını öğrenmekle başlayacağız. Bir

önceki sayfada sıralanmış üç maddeyi sağlayan kümeler cebirde özel bir isim alır. Bu kümelere bir sonraki altbölümde değiniyoruz.

## 1.2 Gruplar

Boştan farklı bir  $G$  kümesi alalım. Ayrıca  $*$  :  $G \times G \rightarrow G$  bir fonksiyon alalım. Bu fonksiyona bir **ikili işlem** adı verilir ve  $*(a, b)$  yerine, aşına olduğumuz üzere,  $a * b$  yazılır. Örneğin,  $+(2, 2) = 4$  yazmıyoruz da  $2 + 2 = 4$  yazıyoruz. Eğer  $(V, *)$  ikilisi aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa:

- Her  $a, b, c \in V$  için  $(a * b) * c = a * (b * c)$  oluyorsa (Yani işlemi hangi sırayla yaptığımızın bir önemi yoksa. Bu özelliğe birleşme özelliği adı verilir),
- Öyle bir  $e \in V$  vardır ki her  $a \in V$  için  $e * a = a * e = a$  oluyorsa, yani kümenin bir etkisiz elemanı varsa (bu elemana birim eleman da denir),
- Her  $a \in V$  için  $a * b = b * a = e$  özelliğini sağlayan bir  $b \in V$  varsa (ters elemanın varlığı),

$(V, *)$  ikilisinin bir grup olduğu söylenir. Örneğin;  $(\mathbb{Z}, +)$ ,  $(\mathbb{Q} - \{0\}, \times)$ ,  $(\mathbb{Q}, +)$  birer grup örneğidir. Bu kitap boyunca işlemimiz toplama olacak, o yüzden  $+$  sembolünü kullanacağız.

**Önsav 1.2.1.** *Her grubun yalnızca bir etkisiz elemanı vardır.*

**Kanıt:**  $G$  bir grup olsun ve iki tane etkisiz eleman alalım:  $x$  ve  $y$ . Bu durumda:

$$x + y = x$$

olur, çünkü  $y$  bir etkisiz elemandır. Aynı şekilde,

$$x + y = y$$

yazabiliriz. O halde

$$x + y = x = y$$

olur. Sonuç olarak  $x$  ve  $y$  eşitmiş. □

Böyle bir önsav kanıtlamak önemliydi. Ya iki tane etkisiz eleman olsaydı? Sıfırın ne önemi kalırdı. Ayrıca sıfırdan başka etkisiz eleman olmadığına göre etkisiz eleman deyince aklımıza rahatlıkla 0 gelebilir. Bu soruyu ters elemanlar için sormak istiyorum. Herhangi bir  $a$  için  $a + (-a) = 0$  olduğunu biliyoruz. Peki, gruptan başka bir  $b$  elemanı için  $a + b = 0$  olabilir mi? Olamaz! Kanıtlayalım.

**Önsav 1.2.2.** *Bir gruptaki her elemanın yalnızca bir tersi vardır.*

**Kanıt:**  $G$  bir grup,  $a \in G$ , ayrıca  $b, c \in G$  için  $a + b = b + a = 0$  ve  $a + c = c + a = 0$  olsun. O halde

$$b = b + 0 = b + (a + c) = (b + a) + c = 0 + c = c$$

olur. Demek ki  $b = c$ . Bu da önsavımızı kanıtlar. □

Eğer grupların birleşme özelliği olmasaydı, ya da ters elemanlar arasında değişme özelliği olmasaydı bu önsav kanıtlanamazdı. Örneğin, ikinci eşitlikten üçüncüye geçerken birleşme özelliğini kullandık. Bu önsav sayesinde  $a$ 'nın tersi dediğimizde aklımıza yalnızca  $-a$  gelecek. Tüm bunların yanında gruplarda sadeleştirme de yapabiliriz. Bunu da kanıtlayalım.

**Önsav 1.2.3.**  $G$  bir grup olsun ve  $a, b \in G$  olsun.  $a = b$  olur ancak ve ancak her  $c \in G$  için  $a + c = b + c$  ise.

**Kanıt:** Herhangi bir  $c \in G$  için  $a = b$  ise  $a + c = b + c$  olduğu açık. Bu, toplamanın iyi tanımlı olmasının doğal bir sonucudur. Şimdi  $a + c = b + c$  varsayımını yapalım. Şimdi birkaç işlem yapmamız gerekiyor:

$$\begin{aligned}
 a &= a + 0 \\
 &= a + (c + (-c)) \\
 &= (a + c) + (-c) \\
 &= (b + c) + (-c) \\
 &= b + (c + (-c)) \\
 &= b + 0 \\
 &= b
 \end{aligned}$$

Böylece  $a = b$  olmuş oldu ve önsav kanıtlandı.  $\square$

Temel ama önemli son bir bilgi daha.

**Önsav 1.2.4.** Bir gruptaki her elemanın tersinin tersi kendisidir. Yani  $-(-a) = a$  geçerlidir.

**Kanıt:** Dikkat ediniz ki  $a + (-a) = 0$  ve  $-(-a) + (-a) = 0$  eşitlikleri geçerlidir. Demek ki hem  $a$  elemanı hem de  $-(-a)$  elemanı  $-a$ 'nın tersidir. Fakat gruplarda her elemanın yalnızca bir tersi vardı, demek ki  $a = -(-a)$ .  $\square$

Buraya kadar kanıtladığımız her şeyi herhangi bir  $*$  işlemi için de yapabiliriz. Öyle yapsak daha iyiydi ama bu kitapta buna pek ihtiyacımız olmayacak. Birçok temel grup teori kitabı bu kanıtları yapar zaten. Vektörlere geri dönelim. Örneğin bir  $\vec{x}$  vektörünü düşünelim. Bizim örneğimizde,  $\vec{x} + \vec{x}$  vektörü,  $\vec{x}$  vektörünün temsil edebileceği uzaklığın 2 katını temsil ediyor. Bu vektörü  $2\vec{x}$  olarak yazabiliriz. Genel olarak  $a \cdot \vec{x}$  vektörü,  $\vec{x}$  vektörünün  $a$  katı uzaklığı temsil eder. Eğer  $a$  negatif ise, bunu ters yönde işlem gibi düşünebilirsiniz:  $\vec{x} + (-1) \cdot \vec{x} = \vec{x} + \vec{-x} = \vec{0}$  yazabilirsiniz mesela. Bu şekilde bir vektör ile bir katsayının çarpılmasına **skaler ile çarpma** adı verilir ve katsayılar **skaler** denir. Tabii ki bu iş bu kadar kolay olmayacak, skalerlerin nasıl sayılar olduğunu da bilmemiz gerekiyor. Bundan böyle  $V$  kümesi değişmeli bir grup olsun, yani her  $a, b \in V$  için  $a + b = b + a$  olsun.

Az önce elimizde tek bir işlem ve tek bir küme vardı. Bu sefer elimizde iki işlem olacak. Örneğin  $(\mathbb{Z}, +, \times)$  ve  $(\mathbb{Q}, +, \times)$  üçlülerini düşünelim. Burada toplama ve çarpma adında iki işlemimiz var. Ayrıca, toplama çarpmaya dağılılabiliyor. Yani bir  $X$  kümesi için şu özellikler sağlanıyor:

1.  $X$ , toplama altında değişmeli bir grup;
2. Her  $a, b, c \in X$  için  $a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$ ;
3. Öyle bir  $1 \in X$  vardır ki her  $a \in X$  için  $a \times 1 = 1 \times a = a$  olsun;
4. Her  $a, b, c \in X$  için  $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$  ve  $(b + c) \times a = b \times a + c \times a$ .
5. Her  $a, b \in X$  için  $a \times b = b \times a$ .

Bu durumda  $\mathbb{Z}$  ile  $\mathbb{Q}$  arasındaki temel farklardan bir tanesi ise çarpmaya göre ters özelliğinin olup olmamasıdır. Örneğın, tam sayılarda 1 ve -1 dışındaki sayıların çarpımsal tersi yoktur. Zira  $2 \in \mathbb{Z}$  için  $\frac{1}{2}$  diye bir çarpımsal ters vardır fakat bu sayı tam sayı olmadığından tam sayılar kümesinde 2 sayısının bir çarpımsal tersi olduğundan söz edemeyiz. Fakat bu durum rasyonel sayılar için farklıdır. Rasyonel sayılarda sıfır hariç her sayının çarpımsal bir tersi vardır. Yani,

$$\forall q \in \mathbb{Q} - \{0\}, \exists p \in \mathbb{Q} (p \times q = q \times p = 1)$$

özelliği sağlanır. Bu son özellikle birlikte demin saydığımız dört özelliği sağlayan  $(X, +, \times)$  üçlülerine **cisim** adı verilir. Skaler dediğimiz sayılar ise cisim elemanlarıdır. En temel cisimler rasyonel sayılar ( $\mathbb{Q}$ ), reel sayılar ( $\mathbb{R}$ ) ve karmaşık sayılardır ( $\mathbb{C}$ ). Bu kitapta işlenen çoğu vektör uzayı, skalerleri bunlar olan uzaylar olacaktır.

Vektör uzaylarına geçmeden önce bariz birkaç not bırakmak istiyorum. Örneğın  $F$  bir cisim olsun. O halde  $F - \{0\}$  kümesi çarpma altında değişmeli bir gruptur. O halde bazı özellikler bedavadan geliyor. Önsav 1.2.1, Önsav 1.2.2, Önsav 1.2.3 ve Önsav 1.2.4 sonuçlarının her birinde  $+$  yerine  $\times$  ve 0 yerine 1 yazdığımızda yine geçerli oluyor. Yani cisimlerin çarpmaya göre tek bir elemanı vardır, her elemanının çarpmaya göre tek bir tersi vardır, cisimlerde çarpmaya göre (0 hariç) sadeleştirme yapabiliriz.

## Egzersizler

**Egzersiz 1.2.1.**  $(\mathbb{Z}, +), (\mathbb{Q} - \{0\}, \times), (\mathbb{Q}, +)$  ikililerinin gerçekten de bir grup olduğuna emin oldun.  $(\mathbb{Q}, \times)$  ikilisinin bir grup olup olmadığını araştıran.

**Egzersiz 1.2.2.** Her cisimde,  $ab = 0$  olmasının gerek ve yeter koşulunun  $a = 0$  veya  $b = 0$  olmasını kanıtlayın.

**Egzersiz 1.2.3.**  $F = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid \forall x \in \mathbb{R} (f(x) \neq 0)\} \cup \{f(x) = 0\}$  kümesinin bir cisim olduğunu gösterin.

**Egzersiz 1.2.4.** Doğal sayılar ( $\mathbb{N}$ ) kümesinin çarpma veya toplamaya göre neden bir grup olamayacağını açıklayın.

**Egzersiz 1.2.5.** Bir grupta  $x * x = x$  eşitliğini sağlayan yalnızca bir eleman olduğunu gösterin.

**Egzersiz 1.2.6.**  $X$  boştan farklı herhangi bir küme olsun.

$$\text{Sym}(X) := \{f : X \rightarrow X \mid f \text{ birebir ve örten}\}$$

şeklinde tanımlanan kümenin fonksiyon bileşkesi işlemi altında bir grup olduğunu gösterin.

**Egzersiz 1.2.7.**  $(G_1, *_1), \dots, (G_n, *_n)$  ikilileri birer grup olsun. O halde

$$(g_1, \dots, g_n) * (h_1, \dots, h_n) = (g_1 *_1 h_1, \dots, g_n *_n h_n)$$

üzerinde işlemi tanımlanan  $G = G_1 \times \dots \times G_n$  Kartezyen çarpım kümesi için  $(G, *)$  bir gruptur. Kanıtlayın.

**Egzersiz 1.2.8.**  $i^2 = -1$  olmak üzere  $\{1, -1, i, -i\}$  kümesinin çarpma altında bir grup olduğunu kanıtlayın.

**Egzersiz 1.2.9.** Kartezyen düzlemde bir  $(x, y)$  noktasını pozitif yönde  $\theta$  radyanlık bir açıyla döndürünce  $(x \cos \theta - y \sin \theta, x \sin \theta + y \cos \theta)$  noktası elde edilir.

$R_\theta : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  fonksiyonu,

$$R_\theta(x, y) = (x \cos \theta - y \sin \theta, x \sin \theta + y \cos \theta)$$

kuralı ile verilsin.  $\{R_\theta : 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$  kümesinin fonksiyon bileşkesi altında değişmeli bir grup olduğunu gösterin.

**Egzersiz 1.2.10.** Bir metro hattı düşünelim ve hattın 16 istasyonu olsun. Bu metro hattının istasyonlarını

$$\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}$$

olarak göstereyim. Metro hattımız ring çalışıyor, yani son duraklarda indirme-bindirme yapmadan geri dönüyor olsun. Örneğin 14 numaralı duraktan 4 istasyon ileri giderse bunu  $14 \rightarrow 15 \rightarrow 14 \rightarrow 13 \rightarrow 12$  şeklinde gösteririz. İki durağı bu şekilde işleme sokalım. Bu şekilde  $x, y$  birer duraksa  $x + y$  durağını,  $x$ 'ten  $y$  kadar ileri gidince denk gelen durak olarak tanımlayalım. Bu işlem altında istasyonlar kümesinin bir grup olduğunu kanıtlayın.

**Egzersiz 1.2.11.**  $\lambda$  sıfırdan farklı bir reel sayı olmak ve  $x^2 = \lambda^2$  ile  $y^2 = \lambda^2$  eşitliklerinin aynı anda sağlanmaması üzere reel sayılar üzerinde aşağıdaki işlem tanımlansın:

$$x * y = \frac{x + y}{1 + \frac{xy}{\lambda^2}}$$

Reel sayılar kümesinin bu işlem altında bir grup olduğunu kanıtlayın.

### 1.3 Vektör Uzayları

Toplama altında değişmeli bir  $V$  grubu alalım.  $F$  bir cisim olsun. Bir  $\cdot : F \times V \rightarrow V$  fonksiyonu alalım.  $\cdot(a, v)$  yerine  $a \cdot v$ , hatta çoğu zaman  $av$  yazacağız. Eğer:

1. Her  $a, b \in F$  ve  $u \in V$  için  $a \cdot (b \cdot u) = (ab) \cdot u$ ,
2. Her  $a, b \in F$  ve  $u \in V$  için  $(a + b) \cdot u = a \cdot u + b \cdot u$ ,
3. Her  $a \in F$  ve  $u, v \in V$  için  $a \cdot (u + v) = (a \cdot u + a \cdot v)$ ,
4.  $1 \in F$  için  $1 \cdot v = v$

özellikleri sağlanıyorsa,  $(V, F, +, \cdot)$  dördlüsüne bir **vektör uzayı** denir. Bazen vektör uzayı yerine yalnızca **uzay** diyeceğiz. Uzaylara örnek olarak hemen aklımıza ilk verdiğimiz örnek olan sayı doğrusu gelebilir.  $\mathbb{R}$  kümesi, skalerleri yine  $\mathbb{R}$ 'den olan bir vektör uzayıdır. Bildiğimiz toplama ve çarpma işlemleri geçerlidir. Bu uzayı iki boyutlu olan  $\mathbb{R}^2$  için şu ikili işlemlerle birlikte düşünebiliriz:

- Her  $(a, b), (c, d) \in \mathbb{R}^2$  için  $(a, b) + (c, d) := (a + c, b + d)$ ,
- Her  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  ve  $x \in \mathbb{R}$  için  $x \cdot (a, b) = (xa, xb)$ .

Toplama işlemi altında  $\mathbb{R}^2$  kümesi, birim elemanı  $(0, 0)$  olan bir gruptur. Herhangi bir  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  alacak olursanız,  $(x, y) + (0, 0) = (x + 0, y + 0) = (x, y)$  olacaktır. Yani  $(0, 0)$  elemanı gerçekten de birim elemandır. Ters elemanı görmek de oldukça kolaydır. Örneğin  $(x, y) + (-x, -y) = (0, 0)$  yazabiliriz. Bunlar oldukça temel olgulardır. Hatta bunun genel halini kanıtlamayı deneyelim.

**Egzersiz 1.3.1.**  $F$  bir cisim olsun. Aşağıda tanımlanan toplama ve skalerle çarpma işlemlerine göre  $F^n$  kümesi  $F$  üzerinde bir vektör uzayıdır:

- **Toplama:**  $(a_1, a_2, \dots, a_n), (b_1, b_2, \dots, b_n) \in F^n$  için  $(a_1, a_2, \dots, a_n) + (b_1, b_2, \dots, b_n) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n)$ ,
- **Skalerle Çarpma:**  $c \in F$  ve  $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in F^n$  için  $c \cdot (a_1, a_2, \dots, a_n) = (ca_1, ca_2, \dots, ca_n)$ .

*Kanıtı okura bırakılmıştır. Bu işlemlerin, vektör uzayı tanımındaki özellikleri sağlayıp sağlamadığını kontrol etmeniz yeterli olacaktır.*

**Teorem 1.3.1.**  $V$  kümesi,  $F$  üzerinde bir vektör uzayı olsun. Aşağıdaki özellikler sağlanır:

- i. Vektörlerde toplamaya göre yalnızca bir etkisiz eleman (ya da birim eleman) vardır. Bu vektöre **sıfır vektörü** denir.
- ii. Her vektörün toplamaya göre yalnızca bir tersi vardır.
- iii.  $0 \in F$  ve herhangi bir  $v \in V$  vektörü için  $0 \cdot v = \vec{0}$  olur. Burada  $0$  bir skaler iken  $\vec{0}$  bir vektördür.

iv. Herhangi bir  $a \in F$  skaleri ve  $\vec{0} \in V$  vektörü için,  $a \cdot \vec{0} = \vec{0}$  olur.

v. Her  $v \in V$  için  $-v = (-1) \cdot v$  olur.

**Kanıt:** Birinci ve ikinci önermeler, sırasıyla Önsav 1.2.1'in ve Önsav 1.2.2'nin direkt olarak sonucudur. Üçüncü önermeyi kanıtlayalım:

$$0 \cdot v = (0 + 0) \cdot v = 0 \cdot v + 0 \cdot v.$$

Böylece  $0 \cdot v = 0 \cdot v + 0 \cdot v$  buluruz. Bunu yeniden  $0 \cdot v + \vec{0} = 0 \cdot v + 0 \cdot v$  olarak düzenleyelim, nasıl olsa  $\vec{0}$ ,  $V$ 'nin etkisiz bir elemanı ve sol taraftaki toplamaya etki etmiyor. Önsav 1.3 yardımıyla sadeleştirme yapabiliriz. Böylece  $\vec{0} = 0 \cdot v$  buluruz. Şimdi dördüncü önermeyi kanıtlayalım.

$$a \cdot \vec{0} = a \cdot (\vec{0} + \vec{0})$$

yazabiliriz. Aynı şekilde dağıtma ve sadeleştirme yaparak  $\vec{0} = a \cdot \vec{0}$  buluruz.

Son olarak  $-v = (-1)v$  kanıtını yapalım. Skalerle çarpmanın dağıtma özelliklerini kullanarak ve yukarıda kanıtladıklarımızdan ötürü

$$(-1) \cdot v + v = v \cdot (-1 + 1) = v \cdot 0 = \vec{0}$$

elde ederiz. Bu da  $-v = (-1)v$  olduğunu kanıtlar.  $\square$

Tahmin edildiği üzere, sıfır skaleri ve sıfır vektörleri skalerle çarpmaya göre yutan elemanlardır. Vektör uzaylarında bir çarpımın sonucunun sıfır olması için iki bileşenden birinin sıfır olması gerekir. Diyelim  $0 \neq a \in F$  ve  $v \in V$  için  $a \cdot v = \vec{0}$  sağlanıyor.  $F$  bir cisim olduğundan ve  $a$  sıfırdan farklı olduğundan çarpmaya göre bir tersi var. O halde  $\vec{0} = a^{-1} \vec{0} = a^{-1} \cdot (a \cdot v) = (a^{-1}a) \cdot v = 1 \cdot v = v$  yazabiliriz. Fakat bu da bize  $v = \vec{0}$  eşitliğini verir. Bu da demek oluyor ki  $a \cdot v = \vec{0}$  ise ya  $a = 0$  olmalı, değilse de  $v = \vec{0}$  olmalı.

Biz vektör uzaylarına örnek vermeye devam edelim. Şu ana kadar  $\mathbb{R}^n$  ve  $\mathbb{C}^n$  örneklerini verdik. Eğer bir uzayın skalerleri reel sayılar ise o uzaya **reel vektör uzayı**, karmaşık sayılar ise **karmaşık vektör uzayı** denir. Biz hep vektörleri birer yön belirten ve üzerinde toplama ve skalerle çarpma işlemleri yapılabilen nesnelere hayal ettik. Fakat vektörleri o şekilde genellemedik. Örneğin;

$$C[0, 1] = \{f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ sürekli bir fonksiyon}\}$$

kümesini düşünelim. Fonksiyon toplamayı biliyorsunuzdur.  $f(x)$  ve  $g(x)$  reel tanımlı fonksiyon iki ise  $f(x) + g(x) = (f + g)(x)$  olarak yazarız. Bu,  $C[0, 1]$  kümesi üzerinde bir ikili işlem verir. Zira iki sürekli fonksiyonun toplamı yine sürekli. Dolayısıyla toplama işlemi  $C[0, 1]$  üzerinde kapalıdır. Bir işlemin bir küme üzerinde kapalı olması demek, o işlemin o küme üzerinde ikili işlem olması demektir. Yani  $a, b$  o kümeden iki eleman ise  $a * b$  de o kümenin bir elemanıdır. Ayrıca bir  $a$  reel sayısı için  $a \cdot f(x)$  fonksiyonu da sürekli. Yani  $f$  sürekli ise  $-f$  de sürekli. Sabit sıfır fonksiyonu, toplamaya göre

birim eleman olup o da süreklidir. Yani  $C[0, 1]$  bir reel vektör uzayıdır. Alışlagelmişin dışında olarak bu uzay öyle oklardan falan değil, fonksiyonlardan oluşmaktadır.

Bunu genelleştirebiliriz.  $S$  bir küme ve  $F$  bir cisim olsun.  $Func(S, F)$  kümesi,  $S$ 'den  $F$ 'ye giden fonksiyonlar kümesi olsun. Toplama ve skalerle çarpma işlemleri şöyle tanımlansın:

- Her  $a \in S$  için  $(f + g)(a) := f(a) + g(a)$
- Her  $a \in S$  ve  $m \in F$  için  $(mf)(a) = m \cdot f(a)$

Dikkat ederseniz  $S$  herhangi bir küme ve üzerinde herhangi bir toplama veya çarpma tanımlanmamış. Fakat  $F$  üzerinde bu işlemler var ve her ne kadar  $a$  ile  $b$  elemanlarını toplayamasak da  $f(a)$  ile  $f(b)$  elemanlarını toplayabiliriz. Tanımlamalar da ona göre verilmiş durumda. Şimdi tek tek  $Func(S, F)$  kümesinin önce bir grup, sonra da  $F$  üzerinde bir vektör uzayı olduğunu gösterelim. Bundan böyle “.” işaretini kullanmadan  $a \cdot b$  yerine  $ab$  yazacağız.

- $f(a)$  ve  $g(a)$  fonksiyonları,  $Func(S, F)$ 'de olsun. O halde her  $a \in S$  için  $f(a) + g(a) \in F$  olmalıdır, zira  $F$  bir cisim olduğundan elemanları toplama altında kapalıdır. O halde  $(f + g)(a)$  fonksiyonu da  $S$ 'den  $F$ 'ye giden bir fonksiyondur. Dolayısıyla  $Func(S, F)$  kümesi toplama altında kapalıdır.
- Her  $a \in S$  için  $0(a) = 0$  olacak şekilde bir fonksiyon tanımlayalım. Herhangi bir  $f \in Func(S, F)$  için  $(f + 0)(a) = f(a) + 0(a) = f(a) + 0 = f(a)$  olur. Aynısı  $(0 + f)(a)$  fonksiyonu için de geçerlidir. O halde sabit sıfır fonksiyonu,  $Func(S, F)$ 'nin birim elemanıdır.
- Her  $f \in Func(S, F)$  için  $g(a) = -f(a)$  olsun. Bunu rahatlıkla tanımlayabiliriz, zira  $F$  bir cisim olduğundan her  $f(a)$  elemanının mutlaka bir  $-f(a)$  şeklinde toplama göre bir tersi olmalı. O halde her  $a \in S$  için  $(f + g)(a) = f(a) + g(a) = f(a) - f(a) = 0 = 0(a)$  yazabiliriz. Demek ki her fonksiyonun toplamaya göre tersi var.
- Her cisim toplama ve çarpma altında değişmelidir. O halde her  $a \in S$  için  $(f + g)(a) = f(a) + g(a) = g(a) + f(a) = (g + f)(a)$  yazabiliriz. Demek ki  $Func(S, F)$  de değişmeliymiş.
- Her  $a \in S$  için  $1 \cdot f(a) = f(a)$  olduğu bariz.
- Her cisimde dağılma özelliği olduğunu görmüştük. O halde  $m \in F$  için  $m(f + g)(a) = m(f(a) + g(a)) = mf(a) + mg(a) = (mf + mg)(a)$  olur.
- Aynı şekilde  $m, n \in F$  için  $(m + n)f(a) = (mf + nf)(a)$  yazılabilir.
- Her cisimde çarpmaya göre birleşme özelliği olduğundan  $m, n \in F$  ve  $f(a) \in Func(S, F)$  için  $m(nf(a)) = (mn)f(a)$  yazabiliriz.

Böylece  $Func(S, F)$ 'nin,  $F$  üzerinde bir vektör uzayı olduğunu görmüş olduk. Hem de madde madde kanıtlayarak vektör uzayı aksiyomlarını da pekiştirmiş olduk.

## 1.4 Altuzaylar

Altuzay kavramı sizin de tahmin edebileceğiniz üzere bir vektör uzayının altkümeleri olarak aynı işlemler altında bir vektör uzayı belirten kümelerdir.

**Tanım.**  $V$  bir vektör uzayı ve  $U \subseteq V$  boştan farklı olsun. Eğer  $U$ ,  $V$ 'nin işlemleri altında kendi başına bir vektör uzayı ise  $U$ 'ya  $V$ 'nin altuzayı denir.

**Önsav 1.4.1.** Bir uzayın altuzay olması için gerek ve yeter şart o uzayın boştan farklı, toplama ve skalerle çarpma altında kapalı bir altküme olmasıdır.

**Kanıt:**  $V$  bir vektör uzayı olmak üzere  $\emptyset \neq U \subseteq V$  olsun. Eğer  $U$  bir altuzay ise işlemler altında kapalılık bariz. Diğer yönü kanıtlayalım. Boştan farklı olduğundan en az bir  $x \in U$  elemanı vardır.  $U$  skalerle çarpma altında kapalı olduğundan  $(-1)x = -x \in U$  olur. O halde  $U$ 'daki her elemanın tersi yine  $U$ 'dadır. Ayrıca  $U$  toplama altında kapalı olduğundan  $x + (-x) = 0 \in U$  yazabiliriz.  $V$ 'nin her elemanı dağılma ve birleşme özelliklerini sağladığından  $U$ 'daki elemanlar da sağlar. O halde  $U$  bir vektör uzayıdır.  $U \subseteq V$  olduğundan  $U$ ,  $V$ 'nin altuzayıdır.  $\square$

**Teorem 1.4.1.**  $V$ ,  $F$  cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. Boştan farklı bir  $U \subseteq V$  için aşağıdaki önermeler eşdeğerdir.

- i.  $U$ ,  $V$ 'nin bir altuzayıdır.
- ii. Her  $u, v \in U$  için  $u + v \in U$  ve her  $a \in F$  için  $av \in U$  olur.
- iii. Her  $u, v \in U$  ve  $a, b \in F$  için  $au + bv \in U$  olur.

Kanıtı Önsav 1.5.1'den direkt gelmektedir.  
 $U$  ve  $W$ ,  $V$  uzayının iki altuzayı olsun.

$$U + W := \{u + w : u \in U, w \in W\}$$

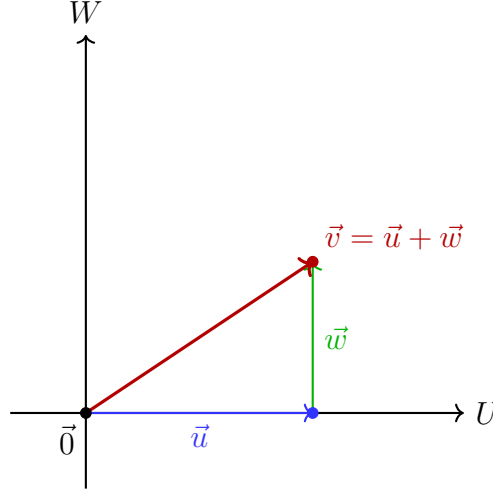
tanımını yapalım.  $U + W$ ,  $V$ 'nin bir altuzayıdır.  $U + W$  kümesinden  $v_1 = u_1 + w_1$  ve  $v_2 = u_2 + w_2$  elemanlarını alalım öyle ki  $u_i \in U$  ve  $w_i \in W$  olsun. O halde

$$v_1 + v_2 = (u_1 + w_1) + (u_2 + w_2) = (u_1 + u_2) + (w_1 + w_2)$$

olur. Fakat  $U$  ve  $W$  altuzaylar olduğundan  $u_1 + u_2 \in U$  ve  $w_1 + w_2 \in W$  olur. Dolayısıyla buradan  $v_1 + v_2 \in U + W$  çıkar. Eğer  $\alpha$  bir skaler ve  $u + w \in U + W$  ise  $\alpha(u + w) = \alpha u + \alpha w$  olup yine  $\alpha(u + w) \in U + W$  buluruz. Böylece  $U + W$ ,  $V$ 'nin bir altuzayıdır dersek yalan olur. Zira  $U + W$  kümesinin boştan farklı olduğunu göstermedik. O kolay, zira  $\vec{0} \in U$  ve  $\vec{0} \in W$  olduğundan  $\vec{0} = \vec{0} + \vec{0} \in U + W$  olur.

Eğer  $U \cap W = \{\vec{0}\}$  ise  $U + W$  yerine  $U \oplus W$  yazarız. Bu toplama  $U$  ile  $W$  altuzaylarının **direkt toplamı** ismi verilir. Direkt toplamlardaki elemanlar, toplama bileşenlerinin tek türlü toplamıyla oluşur. Nitekim eğer  $u + w = u' + w' \in U \oplus W$  ise  $(u - u') + (w - w') = \vec{0}$  yazabiliriz. Böylece  $u - u' = w' - w$  buluruz. Eşitliğin sağ tarafı  $W$ 'nin elemanı olduğundan sol taraf da öyledir. O halde  $u - u' \in U \cap W$  olur.

Fakat  $U \cap W = \{\vec{0}\}$  olduğundan  $u - u' = \vec{0}$  olmalıdır. Bu da  $u = u'$  demektir. Böylece  $\vec{0} = u - u' = w' - w$  elde ederiz. Fakat bu aynı zamanda, aynı mantıkla  $w' = w$  demektir. O halde  $U \oplus W$ 'nin elemanları,  $U$  ve  $W$  elemanlarının toplamı cinsinden tek türlü yazılır.



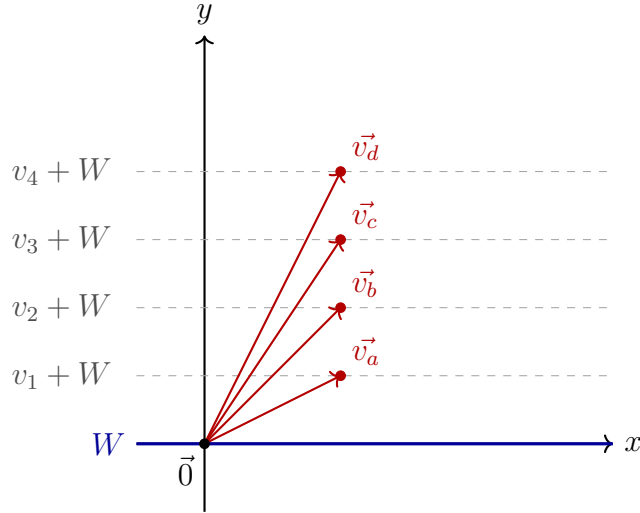
Şekil 4:  $U \oplus W$  uzayının görselleştirilmesi.

$U$  ve  $W$  uzaylarının direkt toplamı olması demek, iki uzayın kesişen tek elemanının  $\vec{0}$  olması demekti, bunu biliyoruz. O halde  $U$  ve  $W$  elemanlarını bir kartezyen düzlem şeklinde ifade edebiliriz. Orijin, tek bir kesişim noktasından oluşuyor ve bu uzay üzerinde herhangi bir  $v$  vektörü,  $v = u + w$  şeklinde tek türlü yazılıyor.

Herhangi bir  $v \in V$  ve bir  $W$  altuzayı alalım.  $v + W$  kümesi, tahmin edildiği üzere  $\{v + w : \forall w \in W\}$  olarak tanımlanır. Bu küme,  $W$  uzayının bir **koseti** olarak adlandırılır. Kosetler arasında toplama ve skalarla çarpma tanımlayabiliriz. Bu toplama  $(v + W) + (u + W) = (u + v) + W$  olarak tanımlanır. Bir düşünün,  $v + w_1 \in v + W$  ve  $u + w_2 \in u + W$  olsun. Bu ikisini toplayarak  $(v + w_1) + (u + w_2) = (u + v) + (w_1 + w_2)$  elde ederiz.  $w_1 + w_2 \in W$  olduğundan eşitliğin sağındaki eleman  $u + v + W$  kosetinin bir elemanıdır.

**Teorem 1.4.2.**  $V$  ve  $U$ ,  $f$  cisim üzerinde iki vektör uzayı olsun.  $V \times U$  kümesi,  $\alpha \cdot (v, u) = (\alpha v, \alpha u)$  skalar çarpması ile ve  $(v_1, u_1) + (v_2, u_2) = (v_1 + v_2, u_1 + u_2)$  toplaması ile verilsin.  $\bar{V} = V \times \{\vec{0}\}$  ve  $\bar{U} = \{\vec{0}\} \times U$  olsun. O halde  $V \times U = \bar{V} \oplus \bar{U}$  olur.

Bu teorem sayesinde  $V \cap U \neq \emptyset$  olsa bile  $U$  ve  $V$  kümelerinin bir şekilde direkt toplamını alabiliriz. Kanıtı okura egzersiz olarak bırakılmıştır.



Şekil 5: Bir  $W$  uzayının kosetleri

Yukarıda kosetlerin görsel bir temsilini görebilirsiniz. Yatay eksen,  $W$  ve elemanlarından oluşuyor. Her bir elemanın dikey ekseninde belli bir yüksekliğe ötelenmesi ile kosetler oluşuyor. Bir örnek verelim.  $\mathbb{R}^2$  uzayını ele alalım. Burada  $U = \{(0, y) : y \in \mathbb{R}\}$ . Öncelikle bu kümenin bir altuzay olduğunu kanıtlayın. Bu küme,

$$\{(0, 0), (0, 1), (0, 2), (0, \pi), (0, 5/2), \dots\}$$

türünde sonsuz elemanlardan oluşur.  $(1, 0) + U$  koseti ise

$$(1, 1), (1, 2), (1, \pi), (1, 5/2)$$

türündeki elemanlardan oluşur.

**Egzersiz 1.4.1.**  $(5, -2) + U$  kosetinin elemanlarını yazın.

Eğer  $v_2 - v_1 \in W$  olursa  $v_1 + W = v_2 + W$  olduğuna dikkat edin. Örneğin  $v \in v_2 + W$  olsun. Bu durumda bir  $w \in W$  için  $v = v_2 + w = v_1 + (v_2 - v_1) + w$  yazabiliriz.  $(v_2 - v_1) + w \in W$  olduğundan  $v \in v_1 + W$  ederiz. Bu durumda  $v_2 + W \subseteq v_1 + W$  olur. Durum simetrik olduğundan tersi de geçerlidir. O halde  $v_1 + W = v_2 + W$  olur. Bu önermenin tersi olan “ $v_1 + W = v_2 + W$  ise  $v_2 - v_1 \in W$  olur.” önermesi de geçerlidir. Kanıtı son derece basit olup okura bırakılmıştır.

**Önsav 1.4.2.**  $a + W$  ve  $b + W$  iki koset olsun. Bu durumda ya  $(a + W) \cap (b + W) = \emptyset$  olur ya da  $a + W = b + W$  olur.

**Kanıt:**  $(a + W) \cap (b + W) \neq \emptyset$  varsayımını yapalım. O halde bir  $v \in (a + W) \cap (b + W)$  vardır. O halde bazı  $w_1, w_2 \in W$  için  $v = a + w_1 = b + w_2$  olur. Bu durumda  $a - b = w_2 - w_1$  bulunur. Sağ taraf  $W$  uzayının bir elemanı olduğundan  $a - b \in W$  olmalıdır. Yukarıdaki hesaplarımızdan ötürü  $a + W = b + W$  elde ederiz.  $\square$

Eğer  $\alpha$  bir skaler ise  $\alpha(v + W) = \alpha v + W$  tanımını yapalım. Nitekim,  $v + w \in v + W$  ise  $\alpha(v + w) = \alpha v + \alpha w \in \alpha v + W$  olur. Böylece noktasal düşünürsek bu tanımlar güzel bir zemine oturmuş olur. Tabii iyi tanımlılık sıkıntılarımız da var. Eğer  $v_1 + W = v_2 + W$  ve  $u_1 + W = u_2 + W$  ise  $(v_1 + u_1) + W = (v_2 + u_2) + W$  olduğunu göstermemiz gerek. Fakat biz  $v_2 - v_1 \in W$  ve  $u_2 - u_1 \in W$  olduğunu biliyoruz. O halde  $(v_2 - v_1) + (u_2 - u_1) \in W$  olmalıdır. Böylece gerekli düzenlemeleri yaparak  $(v_2 + u_2) - (u_1 + v_1) \in W$  olduğunu görebiliriz. Bu da demek oluyor ki  $v_1 + u_1 + W = v_2 + u_2 + W$ . Böylece  $\{u + W : u \in V\}$  kümesinin bir toplaması ve bir skalerle çarpması oldu. Bu kümenin bir vektör uzayı olduğunu gösterin.

Özel olarak  $V/W = \{u + W : u \in V\}$  gösterimini yapacağız. Bu özel uzayın ismi **bölüm uzayı** olarak geçer.

### Egzersizler

**Egzersiz 1.4.2.**  $V$  bir vektör uzayı ve  $U, W \subseteq V$  birer altuzay olsun. O halde  $U \cap W$  kümesinin de  $V$ 'nin bir altuzayı olup olmadığını gösterin.

**Egzersiz 1.4.3.**  $V$  bir vektör uzayı ve  $U, W \subseteq V$  birer altuzay olsun. O halde  $U \cup W$  kümesinin de  $V$ 'nin bir altuzayı olup olmadığını gösterin.

**Egzersiz 1.4.4.**  $f \in \text{Func}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  olmak üzere eğer bir pozitif  $c \in \mathbb{R}$  varsa öyle ki her  $x \in \mathbb{R}$  için  $f(x + c) = f(x)$  oluyorsa  $f$ 'ye periyodik fonksiyon denir. Periyodik fonksiyonların oluşturduğu altkümenin  $\text{Func}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  uzayının bir altuzayı olduğunu gösteriniz.

**Egzersiz 1.4.5.** Karmaşık sayıların ve reel sayıların birer vektör uzayı olduğunu görmüştük.  $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$  ilişkisini de biliyoruz. Peki  $\mathbb{R}, \mathbb{C}$ 'nin bir altuzayı mıdır?

## 2 Taban ve Boyut

### 2.1 Üreteç Kümesi

1 sayısı, tam sayılar kümesi için oldukça önemli bir elemandır. Zira herhangi bir tam sayıyı 1 cinsinden ifade edebiliriz. Örneğin

$$5 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1$$

yazabiliriz. Herhangi bir  $n \in \mathbb{N}$  için

$$n = 1 + 1 + \dots + 1$$

yazmak mümkündür. Eğer  $n$  negatifse

$$n = -1 - 1 - \dots - 1$$

yazabiliriz. Birnevi, 1 sayısının tam sayıları temsil ettiğini söyleyebiliriz. Bu durumda tam sayıların 1 elemanı tarafından üretildiğini söyleriz ve bunu  $\langle 1 \rangle = \mathbb{Z}$  olarak gösteririz. Fakat bunu sağlayan tek sayı 1 değildir. Örneğin  $\{5, 8\}$  kümesini ele alalım. Bu kümenin elemanları ile bütün tam sayıları temsil etmek mümkündür. Bunu basit bir hile ile sağlayacağız:

$$8 + 8 - 5 - 5 - 5 = 1.$$

Bunu yeteri kadar tekrar ettiğimizde her sayıyı elde etmek mümkündür. Böylece 5 ve 8 sayılarının da tam sayıları ürettiğini söyleyebiliriz. Yani  $\langle 5, 8 \rangle = \mathbb{Z}$  yazılabilir. Bu durumda herhangi bir  $n$  sayısı:

$$(2n) \cdot 8 \cdot + (-3n) \cdot 5 = n$$

olarak ifade edilir. Bezout Önsavı yardımıyla bu durumu aralarında asal iki  $p, q$  tam sayı için genelleştirebiliriz:  $\langle p, q \rangle = \mathbb{Z}$  yazabiliriz. Bezout Önsavı, tam sayıların üretilmeleri ile ilgili güçlü bir özellik verir.

**Önsav 2.1.1** (Bezout). *Sıfırdan farklı birer  $a, b \in \mathbb{Z}$  alalım.  $EBOB(a, b) = d$  olsun. Öyle  $x, y \in \mathbb{Z}$  vardır ki*

$$ax + by = d$$

*olur.*

Bu önsava göre aralarında asal iki  $p, q$  sayısı için öyle  $m, n \in \mathbb{Z}$  olmalı ki  $pm + qn = 1$  sağlansın. Bu durumda her  $k$  tam sayısını

$$(km)p + (kn)q = 1$$

olarak ifade edebilir,  $\langle p, q \rangle = \mathbb{Z}$  yazabiliriz. Hadi bu muhteşem önsavı kanıtlayalım.

**Kanıt:**  $A = \{ax + by : x, y \in \mathbb{Z}\}$  kümesini tanımlayalım. Bu küme boştan farklıdır, hatta sonsuz eleman içerir.  $y = 0, x = 1$  seçildiğinde  $a \in A$  olduğunu görürüz. Benzer şekilde  $x = 2$  seçerek  $2a \in A$  olduğunu görürüz. Burada  $a$  sıfırdan farklı olduğu için  $a$  ve  $2a$  farklı elemanlardır ve her  $k$  için  $ka \in A$  olduğunu görürüz. Hatta  $-ka \in A$  da yazabiliriz. Bu bize,  $A$  kümesinin en az bir pozitif elemanı olduğunu söyler.

$$B = \{|c| : c \in A - \{0\}\}$$

olsun. Yani  $B$  kümesi,  $A$ 'nın pozitif elemanlarından oluşsun. Artık  $B \subseteq \mathbb{N}$  yazabiliyoruz. İyi tanımlılık ilkesinden ötürü  $B$  kümesinin bir en küçük elemanı vardır. Bu elemana  $s$  diyelim. Doğal sayıların bölme algoritmasını kullanarak

$$a = sq + r$$

eşitliğini sağlayan  $r < s$  veya  $r = 0$  olacak şekilde  $q$  ve  $r$  doğal sayıları vardır. En nihayetinde  $s \in B \subseteq A$  olduğundan birtakım  $x, y$  tamsayıları için  $s = ax + by$  yazabiliriz. Bu durumda

$$a = (ax + by)q + r$$

elde ederiz. Bu da  $r = a - axq - byq = a(1 - xq) + (-yq)b$  anlamına gelir. Sağ tarafın  $B$ 'nin bir elemanı olduğuna dikkat edin, o halde  $r \in A$ . Fakat  $s$ , sıfırdan farklı bir sayı olup  $B$ 'nin en küçük elemanıydı.  $r \neq 0$  olması,  $r < s$  olması demektir ve bu da  $s$ 'nin,  $B$  kümesinin en küçük elemanı olması ile çelişirdi. Demek ki  $r = 0$ . Bu da demek oluyor ki  $s$  sayısı  $a$ 'yı bölüyor. Aynı şeyleri  $b$  için yaparak  $s$ 'nin  $b$ 'yi de böldüğünü söyleyebiliriz. Demek ki  $s$ ,  $a$  ile  $b$  sayılarının ortak bir böleni. Peki en büyüğü mü? Bakalım.

Şimdi  $t \in \mathbb{N}$  bir ortak bölen olsun. O halde  $a = tm$  ve  $b = tk$  olacak şekilde  $m, k \in \mathbb{N}$  vardır. O halde

$$ax + by = (tmx + tky) = t(mx + ky)$$

yazabiliriz.  $mx + ky$  bir tamsayı olduğundan  $t$ ,  $ax + by$  sayısını böler. Demek ki

$$t \mid ax + by = s.$$

O halde  $s = d$  imiş. Bu da kanıtı tamamlar.  $\square$

O halde tam sayılar için üreteç hesaplayabileceğimiz bir teorem bulmuş olduk. Peki ama bunun vektör uzayları ile ne alakası var? Haklısınız, yok. Tamsayıların üretilmesi ile ilgili verdiğim bu örneği vektörler için düşüneceğiz. Öyle bir vektör kümesi bulmaya çalışacağız ki bu kümenin elemanları ile tüm vektörleri temsil edebilelim.  $V, F$  cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. Boştan farklı bir  $X = \{v_1, \dots, v_n\} \subseteq V$  kümesi alalım. Eğer her  $v \in V$  için  $v = a_1v_1 + \dots + a_nv_n$  olacak şekilde  $a_1, \dots, a_n \in F$  varsa  $X$  kümesinin  $V$ 'yi sonlu ürettiğini söyleriz ve bunu  $V = \langle v_1, \dots, v_n \rangle$  veya  $V = \langle X \rangle$  olarak gösteririz. Bu bize yeni bir şeyi tanımlama fırsatı veriyor.

**Tanım.**  $V, F$  üzerinde bir vektör uzayı olsun.  $v_1, \dots, v_n \in V$  alalım. Bazı  $a_1, \dots, a_n \in F$  için

$$a_1v_1 + \dots + a_nv_n$$

vektörüne,  $v_1, \dots, v_n$  vektörlerinin bir **doğrusal (linear) kombinasyonu** adı verilir.

Örneğin,  $ax + by$  sayısı,  $a$  ve  $b$ 'nin bir doğrusal kombinasyonudur. Bu tanımı biz vektör uzayları için yaptık fakat bunu benzer cebirsel yapılar için de düşünebilirsiniz. Dolayısıyla  $\mathbb{Z}$  bir cisim olmasa bile  $ax+by$  elemanın bir doğrusal kombinasyon olduğunu söyleyebiliriz.

**Teorem 2.1.1.**  $V$  bir vektör uzayı ve  $X$  onun bir altkümesi olsun.

$$\tau = \{U \subseteq V \mid X \subseteq U, U \text{ bir altuzay}\}$$

tanımını yapalım. Daha açıklayıcı olmak gerekirse  $\tau$  kümesi,  $X$ 'i içeren  $V$ 'nin altuzaylarının kümesi olarak tanımlandı. O halde  $\langle X \rangle = \bigcap_{U \in \tau} U$  olur.

Yani teorem diyor ki,  $X$ 'in ürettiği bir altuzay,  $X$ 'i içeren en küçük altuzaydır. Egzersiz 1.4.1'de altuzayların kesişiminin yine bir altuzay olduğunu görmüştük. O halde  $\bigcap U$  tarzında bir altuzaydan bahsetmek mümkündür. Aslında bunu teorem olarak değil, bir tanım olarak da yazabilirdik. Fakat biz tanımı başka bir şekilde yaptık. Bunu şöyle düşünün, iki tanımın birbirine uyup uymadığını kontrol ediyoruz.

**Kanıt:** Herhangi bir  $x \in X$  vektörü alalım.  $X \subseteq U$  özelliğini sağlayan her  $U$  altuzayı için  $x \in U$  olduğu açıktır. Bu da  $x \in \bigcap U$  demektir. Şimdi ters yöne bakalım. Bunun için karşıt ters mantığını kullanacağız, yani  $p \implies q$  önermesini kanıtlamak yerine  $\neg q \implies \neg p$  önermesini kanıtlayacağız.  $x \notin \langle X \rangle$  olsun.  $\langle X \rangle$  kümesi  $X$ 'i içeren bir altuzaydır. Yani,  $\langle X \rangle \in \tau$  olur. Bu durumda  $x \notin \bigcap U$  olduğu barizdir.  $\square$

**Önsav 2.1.2.**  $U_1, U_2, \dots, U_n$ ,  $V$ 'nin altuzayları olsun. O halde  $U_1 + U_2 + \dots + U_n = \langle U_1, U_2, \dots, U_n \rangle$  sağlanır.

**Kanıt:**  $u_1 \in U_1, u_2 \in U_2, \dots, u_n \in U_n$  olmak üzere bir  $u_1 + u_2 + \dots + u_n$  elemanı alalım. Bu eleman,  $U_1, U_2, \dots, U_n$  uzaylarını içeren herhangi bir kümenin elemanıdır. O halde  $u_1 + u_2 + \dots + u_n \in \langle U_1, U_2, \dots, U_n \rangle$  elde edilir. Demek ki  $U_1 + \dots + U_n \subseteq \langle U_1, \dots, U_n \rangle$ . Şimdi  $v \in \langle U_1, U_2, \dots, U_n \rangle$  olsun.  $u_1 \in U_1, u_2 \in U_2, \dots, u_n \in U_n$  olmak üzere

$$v = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_n u_n$$

yazabiliriz. Fakat  $U_i$ 'ler alt uzay olduğundan her  $i$  için  $\alpha_i u_i \in U_i$  olur. Demek ki  $v \in U_1 + U_2 + \dots + U_n$  olur. Böylece  $\langle U_1, \dots, U_n \rangle \subseteq U_1 + \dots + U_n$  olduğu görülür. Buradan aradığımız eşitlik gelir.  $\square$

## 2.2 Doğrusal Bağımsızlık

Tam sayılar örneğine geri dönelim.  $\langle 5, 8 \rangle = \mathbb{Z}$  olduğunu söylemiştik. Bunu istersek  $\langle 5, 8, 3 \rangle$  olarak da yazabiliriz. Üreteçlere yeni bir eleman ekledik. Bu bir sıkıntı değil, zira hala daha

$$5x + 8y + 3z$$

türündeki elemanlar  $\mathbb{Z}$ 'yi üretiyor. Gerekirse  $z = 0$  alabiliriz, fakat zorunda değiliz. Zira 5 ve 3 sayıları da aralarında asaldır ve  $y = 0$  alarak da tüm sayıları temsil edebiliriz. Fakat burada bir sıkıntı var. 5 ve 8 sayıları zaten  $\mathbb{Z}$ 'yi üretiyorken neden ek bir elemana ihtiyaç duyalım ki?  $\{5, 8, 3\}$  kümesinden herhangi bir elemanı çıkarsak da elde kalan küme tamsayıları yine üretiyor olurdu öyle değil mi? O halde şu önerme bariz olmalı:  $\langle X \rangle = V$  ise her  $X \subseteq Y$  için  $\langle Y \rangle = V$  olur. Daha doğrusu  $V \subseteq \langle Y \rangle$  yazmamız gerekirdi eğer  $V$  başka bir uzayın altuzayı olsaydı. Tabii biz bu durumla şimdilik ilgilenmiyoruz. Bunun için hayatımıza yeni bir kavram giriyor.

**Tanım.**  $V, F$  üzerine bir vektör uzayı ve  $\{v_1, \dots, v_n\} \subseteq V$  olsun. Her

$$a_1v_1 + \dots + a_nv_n = b_1v_1 + \dots + b_nv_n$$

doğrusal kombinasyonu için  $a_i = b_i$  eşitliği her  $1 \leq i \leq n$  için sağlanıyorsa,  $\{v_1, \dots, v_n\}$  kümesine **doğrusal (linear) bağımsız** adı verilir. Doğrusal bağımsız olmayan bir kümeye **doğrusal bağımlı** denir.

Bu tanım gereği her vektör, doğrusal bağımsız bir üreteç kümesinin elemanları tarafından tek türlü üretilir. Bu, çok güçlü bir özelliktir ve vektör uzayları hakkında birçok şey söyler.

**Önsav 2.2.1.** Bir  $v_1, \dots, v_n$  vektör topluluğunun doğrusal bağımsız olması için gerek ve yeter şart  $a_1v_1 + \dots + a_nv_n = \vec{0}$  denkleminin tek çözümünün her  $1 \leq i \leq n$  için  $a_i = 0$  olmasıdır.

**Kanıt:**  $\{v_1, \dots, v_n\}$  kümesi doğrusal bağımsız olsun.

$$a_1v_1 + \dots + a_nv_n = \vec{0} = 0 \cdot v_1 + \dots + 0 \cdot v_n$$

olsun. O halde tanım gereği her  $i$  için  $a_i = 0$  olur.

Şimdi ters yönü kanıtlayalım.  $a_1v_1 + \dots + a_nv_n = b_1v_1 + \dots + b_nv_n$  olsun. O halde

$$(a_1 - b_1)v_1 + \dots + (a_n - b_n)v_n = 0$$

şeklinde yeniden bir düzenleme yapabiliriz. Fakat bu, varsayım gereği ancak ve ancak her  $i$  için  $a_i - b_i = 0$  ise doğru. Demek ki her  $i$  için  $a_i = b_i$ .  $\square$

## Egzersizler

**Egzersiz 2.2.1.**  $\{5, 8\}$  kümesinin, tamsayılarda lineer bağımsız olup olmadığını araştırın. *Not: Biz linner bağımsızlığı cisimler üzerinden vermiştik fakat tamsayılar bir cisim değil. Tanımdaki tek türülük koşulunun sağlanıp sağlanmadığını kontrol edin.*

**Egzersiz 2.2.2.**  $X$ , doğrusal bağımsız bir kümeyse  $X$ 'in her altkümesinin doğrusal bağımsız olduğunu kanıtlayın.

**Egzersiz 2.2.3.**  $X$  doğrusal bağımlı bir küme ve  $X \subseteq Y$  olsun.  $Y$  kümesinin de doğrusal bağımlı olduğunu kanıtlayın.

**Egzersiz 2.2.4.**  $\mathbb{R}^2$  uzayında sıfırdan farklı herhangi üç vektörün doğrusal bağımlı olduğunu kanıtlayın.

**Egzersiz 2.2.5.**  $X$  ve  $Y$  birer üreteç kümesi olsun.  $O$  halde  $X \cap Y$  kümesinin de bir üreteç kümesi olup olmadığını gösterin.

**Egzersiz 2.2.6.**  $X = \{(1, 3), (2, 5)\}$  kümesinin  $\mathbb{R}^2$  uzayını ürettiğini gösterin.

**Egzersiz 2.2.7.**  $F$  bir cisim olsun.  $F$ 'yi kendi üzerine bir vektör uzayı olarak alalım.  $O$  halde  $\{a\} \subseteq F$  kümesinin  $F$ 'yi üretmesi için bir gerek ve yeter koşul bulun.

**Egzersiz 2.2.8.**  $\langle X \rangle = \langle Y \rangle$  ise  $X = Y$  önermesinin doğru olup olmadığını kanıtlayın.

**Egzersiz 2.2.9.**  $x$  ve  $y$  elemanlarının doğrusal bağımsız olmasının gerek ve yeter koşulunun  $(y + \langle x \rangle) \cap \langle x \rangle = \emptyset$  olması gerektiğini gösterin.

**Egzersiz 2.2.10.**  $V = U \oplus W$  olsun. Sıfırdan farklı  $u \in U$  ve  $w \in W$  elemanlarının doğrusal bağımsız olduğunu gösterin.

**Egzersiz 2.2.11.**  $F^2$  uzayından alınan iki sıfırdan farklı  $(a, b), (c, d)$  vektörünün doğrusal bağımlı olması için gerek ve yeter koşulun  $ad - bc = 0$  olduğunu kanıtlayın.

**Egzersiz 2.2.12.** Bir  $V$  vektör uzayının minimal doğrusal bağımlı  $v_1, v_2, \dots, v_n$  kümesini alalım.  $O$  halde

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = 0$$

eşitliğinde hiçbir  $\alpha_i$  katsayısının sıfır olmadığını kanıtlayın.

## 2.3 Taban

Bu altbölümde vektör uzaylarının doğrusal bağımsız olan üreteç kümelerini ele alacağız. Doğrusal bağımsızlıkla ilgili teknik, temel ve bir o kadar da önemli birkaç kanıtımız olacak.

**Önsav 2.3.1.** *Her vektör uzayının boştan farklı maksimal bir doğrusal bağımsız altkütmesi vardır.*

**Kanıt:** Eğer  $V = \{0\}$  ise kanıtlanacak bir şey yok.  $V \neq \{0\}$  bir vektör uzayı olsun ve herhangi bir  $0 \neq v \in V$  alalım. O halde her  $a$  skaleri için  $av = 0$  eşitliğinin tek çözümü  $a = 0$  olmasıdır. Bunu 1.4 numaralı altbölümde görmüştük. Demek ki  $\{v\}$  kümesi doğrusal bağımsızdır. Bu da demek oluyor ki boştan farklı doğrusal bağımsız kümeler vardır. Doğrusal bağımsız, boştan farklı kümeler içeren herhangi bir  $X_1 \subseteq X_2 \subseteq \dots$  altküme zinciri alalım.  $X = \cup X_i$  alalım. Bu kime doğrusal bağımsız olmasın. O halde  $av = u$  eşitliğini sağlayan  $v, u$  vektörleri ve  $a$  skaleri vardır.  $v$ 'yi içeren en küçük kümeye  $Y$  diyelim. O halde  $Y \cup \{u\}$  kümesi, zincirin en az bir elemanı tarafından içerilir. Bu da zincirdeki en az bir kümenin doğrusal bağımlı olması demektir ki bu bir çelişkidir. O halde  $X$  doğrusal bağımsızdır. Her doğrusal bağımsız zincirin bir doğrusal bağımsız bir üst sınırı olduğundan Zorn Önsavı gereğince maksimal bir doğrusal bağımsız küme vardır.  $\square$

**Önsav 2.3.2.**  *$V$  bir vektör uzayı ve  $X$ , uzayın doğrusal bağımsız maksimal bir altkütmesi olsun. O halde  $\langle X \rangle = V$  olur.*

**Kanıt:**  $V = X$  ise sorun yok.  $V - X \neq \emptyset$  olsun. Herhangi bir  $v \in V$  alalım.  $v \in X$  ise

$$v + \sum_{u \in X - \{v\}} 0 \cdot u = v$$

olduğundan  $v$  zaten üretilmiş olur. Şimdi  $v \in V - X$  olsun. O halde  $X$ 'in maksimalliğinden ötürü  $X \cup \{v\}$  kümesi doğrusal bağımsız değildir. Bu durumda en az biri sıfırdan farklı olan  $a_1, \dots, a_n$  skalerleri için

$$\sum_{u \in X, a_i \in F} a_i u + av = 0$$

olur. Burada  $a = 0$  değildir. Eğer  $a$  sıfır olsaydı geriye kalan elemanlar doğrusal bağımsız olduğundan her katsayı sıfır olurdu, bu da en az bir sıfırdan farklı katsayı olması ile çelişirdi.  $a \neq 0$  olduğundan  $a$ 'nın çarpmaya göre bir tersi vardır. O halde

$$\sum_{u \in X, a_i \in F} -a^{-1} a_i u = v$$

şeklinde düzenleme yapabiliriz. Bu da  $v \in \langle X \rangle$  demektir, yani  $\langle X \rangle = V$ .  $\square$

**Sonuç 2.3.1.** *Her vektör uzayının doğrusal bağımsız bir üreteç kümesi vardır.*

Bir vektör uzayının doğrusal bağımsız üreteç kümelerine **taban** adı verilir ve o tabanın eleman sayısına uzayın **boyutu** ismi verilir. Bir sonraki altbölümde boyut üzerinde daha çok duracağız. Maksimal doğrusal bağımsız bir kümenin üreteç kümesi olduğunu söyledik. Peki buna benzer olarak minimal üreteç kümelerinin doğrusal bağımsız olduğunu söyleyebilir miyiz? Cevap veriyorum: Evet! Peki minimal bir üreteç kümesinin her zaman var olduğunu nereden biliyoruz? Bu zor olmasa gerek. Bir  $V$  vektör uzayının bariz bir üreteç kümesi var, o da kendisi. Bu kümeyi, üreteç kümesi olmayana kadar daralttığımızda minimal üreteç kümesine yaklaşabiliriz.

**Önsav 2.3.3.**  $V$  bir vektör uzayı,  $X$  onun sonlu minimal bir üreteç kümesi olsun.  $O$  halde  $X$  doğrusal bağımsızdır.

**Kanıt:**  $X$  doğrusal bağımlı, minimal bir üreteç kümesi olsun. Diyelim ki  $a_1, \dots, a_n$  skalerleri için  $a_1v_1 + \dots + a_nv_n = 0$  oluyor.  $X$  doğrusal bağımlı olduğundan  $a_1, \dots, a_n$  katsayılarından en az biri sıfırdan farklı. Diyelim  $a_i \neq 0$ .  $O$  halde

$$-a_iv_i = \sum_{j=1, j \neq i}^n a_jv_j$$

yazabiliriz. Bu da demek oluyor ki,

$$v_i = -a_i^{-1} \sum_{j=1, j \neq i}^n a_jv_j = \sum_{j=1, j \neq i}^n -a_i^{-1}a_jv_j.$$

Demek ki  $X - \{v_i\}$  kümesi,  $v_i$ 'yi üretiyor.  $O$  halde  $v_i$  ile üretilen her vektörün doğrusal kombinasyonunda gerekirse  $v_i$  yerine  $X - \{v_i\}$  kümesinin elemanlarını kullanarak yeniden yazabiliriz. Bu da demek oluyor ki  $X - \{v_i\}$  kümesi  $V$ 'yi hala daha üretiyor. Fakat bu,  $X$ 'in minimalliği ile çelişir.  $\square$

Bir vektör uzayının tabanı tek türlü belirlenmek zorunda değildir. Birden fazla taban bulabilmek mümkündür. Örneğin, reel sayılar üzerinde  $\{1\}$  kümesi ile  $\{2\}$  kümesi birer taban belirtir. Nitekim her  $x$  reel sayısı için,

$$\begin{aligned} x &= x \cdot 1 \\ x &= \frac{x}{2} \cdot 2 \end{aligned}$$

yazmak mümkündür. Tek elemanlı kümelerin vektör uzaylarında doğrusal bağımsız olduğunu Önsav 2.3.1 içerisinde göstermiştik. Dolayısıyla hem doğrusal bağımsız hem de üreteç kümesi olarak  $\{1\}$  ve  $\{2\}$  kümeleri, reel sayıların birer tabanıdır. İlk belirttiğimiz  $\{1\}$  kümesi, daha doğal gözükten bir tabanıdır. Bu tür bir tabana **kanonik taban** ismi verilir.  $F$  bir cisim ve  $F^n$  bir vektör uzayı olsun.  $F$ 'nin illaki çarpmaya göre birim elemanı olmalı, o elemana 1 diyoruz zaten.  $e_i = (\delta_{i,j})$  tanımını yapalım. Burada,  $\delta_{i,j}$  kronecker delta ismini alır ve

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$$

kuralı ile tanımlanır. Yani  $e_i$  bir sıralı  $n$ -lidir öyle ki  $i$ 'inci satırı 1, diğer satırları 0.  $\mathbb{R}^2$ 'yi ele alalım. Her  $(a, b)$  vektörü için

$$(a, b) = a(1, 0) + b(0, 1)$$

yazmak mümkündür. O halde  $E = \{(0, 1), (1, 0)\}$  bir üreteç kümesidir. Ayrıca

$$(0, 0) = x(1, 0) + y(0, 1) = (x, y)$$

denkleminin tek çözümünün  $x = y = 0$  olduğu açıktır. O halde  $E$  bir tabandır. Genel olarak

$$e_1 = (1, 0, \dots, 0), e_2 = (0, 1, \dots, 0), \dots, e_n = (0, 0, \dots, 1)$$

türündeki elemanlardan oluşan her küme bir tabandır. Daha önce de belirttiğimiz gibi bu tabanlar kanonik taban olarak adlandırılır. Tabanların tek türlü belirlenmediğini söylemiştik. Şimdi buna bir örnek vereceğiz. Bunu, tabanları kendi elemanları cinsinden değiştirerek yapacağız.

**Önsav 2.3.4.**  $V$ , sonlu üretilen bir vektör uzayı ve  $X$  onun bir tabanı olsun. Daha açık bir şekilde

$$X = \{v_1, \dots, v_n\}$$

yazalım. Bazı  $1 \leq i, j \leq n$  için  $X = \{v_1, \dots, v_i, v_j, \dots, v_n\}$  kümesini  $Y = \{v_1, \dots, v_i + v_j, v_j, \dots, v_n\}$  kümesi ile değiştirirsek yine bir taban elde ederiz.

**Kanıt:** Herhangi bir  $w \in V$  vektörü alalım.  $X$  bir taban olduğundan

$$w = a_1v_1 + \dots + a_iv_i + a_jv_j + \dots + a_nv_n$$

yazabiliriz. Eşitliğin sağ tarafına  $a_iv_j$  ekleyip aynı taraftan  $a_iv_j$  çıkarırsak eşitlik bozulmaz. Yapalım:

$$w = a_1v_1 + \dots + a_iv_i + (a_iv_j - a_iv_j) + a_jv_j + \dots + a_nv_n.$$

Bu durumda herhangi bir  $w \in V$  için

$$w = a_1v_1 + \dots + a_iv_i(v_i + v_j) + (a_j - a_i)v_j + \dots + a_nv_n$$

elde etmiş olduk. Demek ki  $Y$  bir üreteç kümesi imiş. Şimdi doğrusal bağımsızlığı kanıtlayalım.

$$\begin{aligned} 0 &= x_1v_1 + \dots + x_i(v_i + v_j) + x_jv_j + \dots + x_nv_n \\ &= x_1v_1 + \dots + x_iv_i + x_iv_j + x_jv_j + \dots + x_nv_n \\ &= x_1v_1 + \dots + x_iv_j + (x_i + x_j)v_j + \dots + x_nv_n \end{aligned}$$

Fakat bu terimler zaten  $X$  kümesinin elemanları ve  $X$  kümesinin doğrusal bağımsız olduğunu biliyoruz. O halde

$$x_1 = 0, \dots, x_i = 0, x_i + x_j = 0, \dots, x_n = 0$$

olması gerektiğini biliyoruz. Buradan rahatlıkla  $x_j = 0$  buluruz ve kanıt tamamlanır.  $\square$

Bu teoremdede 0'ı iki anlamda kullandık. İçerikten rahatlıkla anlaşılacağı durumlarda bundan böyle  $\vec{0}$  yerine direkt 0 yazacağız.

**Önsav 2.3.5.**  $V$  bir vektör uzayı ve  $X = \{v_1, \dots, v_n\}$  onun bir tabanı olsun. Sıfırdan farklı  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  skalerleri için  $Y = \{\alpha_1 v_1, \dots, \alpha_n v_n\}$  kümesi  $V$ 'nin bir tabanıdır.

**Kanıt:** Herhangi bir  $w \in V$  alalım.

$$w = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n$$

olsun. O halde bariz bir şekilde

$$w = \alpha_1^{-1} x_1 (\alpha_1 v_1) + \dots + \alpha_n^{-1} x_n (\alpha_n v_n)$$

yazabiliriz. Demek ki  $Y$  bir üreteç kümesiymiş. Doğrusal bağımsız olup olmadığını görelim, ki bu çok basit.

$$0 = \sum_{i=1}^n x_i (\alpha_i v_i)$$

olsun. O halde  $X$  doğrusal bağımsız olduğundan her  $i$  için  $x_i \alpha_i = 0$  olmalı. Fakat  $\alpha_i \neq 0$  olduğundan her  $i$  için  $x_i = 0$  olmalıdır. Bu da doğrusal bağımsızlığı kanıtlar.  $\square$

**Sonuç 2.3.2.**  $X = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ ,  $V$  uzayının bir tabanı olsun. O halde

$$Y = \{\alpha_{11} v_1, \\ \alpha_{21} v_1 + \alpha_{22} v_2, \\ \dots, \\ \alpha_{n1} v_1 + \alpha_{n2} v_2 + \dots + \alpha_{nn} v_n\}$$

kümesini  $V$ 'nin bir tabanı yapan  $\alpha_{ij}$  skalerleri vardır.

Bu sonuç, ilerde üst-üçgensel matrisleri tanımlama açısından önem arz edecek. Size bir soru: Doğrusal bağımsız herhangi bir küme, bir tabana genişletilebilir mi? Bir sonraki teoremdede bu temel sorunun cevabını arayacağız.

**Teorem 2.3.1** (Tabana Genişletme).  $V$  bir vektör uzayı ve  $Y$  onun doğrusal bağımsız bir altkümesi olsun.  $V$ 'nin öyle bir  $E$  tabanı vardır ki  $Y \subseteq E$  olur.

**Kanıt:** Zorn Önsavını kullanacağız. Bunun için “ $\subseteq$ ” bağıntısıyla bir zincir oluşturacağız. Zincirin en alt elemanı  $Y$  olsun. Şimdi bir  $x \in V$  seçelim. Eğer  $Y \cup \{x\}$  doğrusal bağımsızsa zinciri

$$Y \subseteq Y \cup \{x\}$$

olarak yazalım. Eğer değilse zincir

$$Y \subseteq Y$$

olarak kalsın. Şimdi bunu her  $x \in V$  için yaparak ve tekrarlayan elemanları zincirden çıkararak bir

$$Y_0 = Y \subseteq Y_1 = Y \cup \{x_1\} \subseteq Y_2 = Y \cup \{x_1, x_2\} \subseteq \dots$$

zinciri elde edebiliriz. Bu zincir doğrusal bağımsızdır ve her bir elemanı  $Y$  kümesini içerir. Önsav 2.3.1'de olduğu gibi  $\bigcup Y_i$  kümesi de doğrusal bağımsızdır ve  $Y$ 'yi içerir. Zincirin bir üst sınırını bulmuş olduk. Zorn Önsavından  $Y$ 'yi içeren maksimal bir doğrusal bağımsız kümenin varlığını söyleyebiliriz. Önsav 2.3.2 gereği bu küme üreteç kümesidir, dolayısıyla bir tabandır.  $\square$

Önsav 2.3.3'ten her sonlu minimal üreteç kümesinin bir taban olduğunu biliyoruz. Peki bunun tersi doğru mudur? Her sonlu taban, minimal bir üreteç kümesi olabilir mi? Bu çok kritik bir soru. Bir sonraki altbölümde bir vektör uzayının boyutu hakkında çok şey söyleyecek.

**Önsav 2.3.6.**  $V$  bir vektör uzayı ve  $X$  onun sonlu bir tabanı olsun. O halde  $X$  minimal bir üreteç kümesidir.

**Kanıt:** Bir an için  $X$  kümesinin minimal olmadığını varsayalım. O halde bir  $0 \neq v \in X$  için  $X - \{v\}$  kümesi hala daha bir üreteç kümesidir.  $X$  doğrusal bağımsız olduğundan  $X - \{v\}$  kümesi de doğrusal bağımsızdır. Demek ki  $X - \{v\}$  bir tabandır. O halde

$$v = \sum_{u_i \in X} a_i u_i$$

yazılabilir. Burada  $v \neq 0$  olduğundan en az bir  $a_i$  skaleri sıfırdan farklıdır. O halde

$$0 = v - \sum_{u_i \in X} a_i u_i$$

eşitliği sıfırdan farklı bazı skalerler için sağlanır. Fakat bu eşitlikte sağ taraf  $X$ 'in elemanları, bu da  $X$ 'in doğrusal bağımsız olması ile çelişir. Demek ki  $X$  minimal olmalıydı.  $\square$

Bunu kanıtlamak önemliydi. Şimdi doğrusal bağımsız kümelerle üreteç kümeleri arasında temel bir ilişkiyi ortaya koyacağız.

**Teorem 2.3.2.**  $V$  bir vektör uzayı,  $Y$  onun doğrusal bağımsız bir altkümesi ve  $X$  uzayın bir üretici olsun. O halde  $|Y| \leq |X|$  sağlanır.

**Kanıt:** Önsav 1.1'den ötürü  $Y$ 'yi içeren bir  $E$  tabanı vardır.  $E$  taban olduğundan  $X$ 'in elemanlarını  $E$  cinsinden ifade edebiliriz. Yani,  $e_1, \dots, e_n \in E$  olmak üzere her  $x \in X$  için  $x = a_1 e_1 + \dots + a_n e_n$  yazabiliriz.  $X$ 'i bu tür elemanlarla yeniden yazalım. Sonuç 2.3.2'den bu elemanları üçgensel bir biçimde tekrardan yazabiliriz. Buradan ve  $E$ 'nin minimalliğinden  $|E| \leq |X|$  olduğu çıkar. Böylece  $|Y| \leq |E| \leq |X|$  elde ederiz ve kanıt tamamlanır.  $\square$

Bundan böyle  $F$  bir cisim ve  $V$  kümesi de  $F$  üzerine bir vektör uzayı olacak. Bundan sonraki teorem veya önsavlarda bunu ek olarak belirtmeyeceğiz. Şimdi  $V_1, \dots, V_n$ , kümeleri  $F$  cismi üzerine birer vektör uzayı olsunlar.  $E_1, \dots, E_n$  kümeleri de sırasıyla bu uzayların tabanları olsun.

**Önsav 2.3.7.**  $E = \bigcup_{i=1}^n \{0\} \times \dots \times E_i \times \dots \times \{0\}$  kümesi,  $V = V_1 \times \dots \times V_n$  uzayının bir tabanıdır.

Kanıtı son derece kolaydır ve okura bırakılmıştır. Çok benzer bir önerme daha verelim. Kanıtı yine okura bırakılmıştır.

**Önsav 2.3.8.**  $V = V_1 \oplus \dots \oplus V_n$  alalım.  $E_1, \dots, E_n$  kümeleri sırasıyla  $V_1, \dots, V_n$  uzaylarının tabanları olsun. O halde  $E = \bigcup_{i=1}^n E_i$  kümesi,  $V$ 'nin bir tabanıdır.

Bir sonraki teorem, sonlu üretilen uzayların altuzaylarını karakterize etmek için önemli bir adım olacak. Zira, sonlu üreteçli bir uzayın altuzaylarının da sonlu üreteçli olduğunu sezgisel olarak anlayabiliyoruz fakat her zamanki gibi bize gerçek bir kanıt lazım.

**Teorem 2.3.3.**  $V$  bir sonlu üreteçli vektör uzayı ve  $U$  onun bir altuzayı olsun. O halde  $U$  da sonlu üreteçlidir.

**Kanıt:** Eğer  $U = \{0\}$  ise  $U$  zaten sonlu üreteçlidir. Hatta 0 elemanlı üreteç kümesi vardır (bkz. Egzersiz 2.3.5).  $U \neq \{0\}$  olsun. Sıfırdan farklı bir  $v_1 \in U$  vektörü seçelim. Eğer  $\langle v_1 \rangle = U$  ise kanıt biter. Değilse devam edelim. Diyelim bu şekilde doğrusal bağımsız  $v_1, v_2, \dots, v_{n-1}$  seçtik. Herhangi bir  $v_n \in U$  için  $v_n \in \langle v_1, v_2, \dots, v_{n-1} \rangle$  oluyorsa sorun yok. Eğer değilse bu listeye  $v_n$  vektörünü de ekleyerek  $\langle v_1, v_2, \dots, v_n \rangle$  listesini inceleyelim. Fakat  $V$  sonlu üreteçli olduğundan ve Teorem 2.3.2'den ötürü oluşturduğumuz liste,  $V$ 'nin minimal üreteç kümelerini geçemez. O halde sonlu bir sayıda  $v_1, \dots, v_m$  lineer bağımlı bir vektör topluluğu bulabilmeliyiz. Fakat bu durumda  $\langle v_1, \dots, v_m \rangle = U$  elde ederiz.  $\square$

## Egzersizler

**Egzersiz 2.3.1.** Önsav 2.3.7 ve Önsav 2.3.8 önermelerini kanıtlayın.

**Egzersiz 2.3.2.** Her tabanın maksimal bir doğrusal bağımsız küme olduğunu gösterin.

**Egzersiz 2.3.3.**  $\mathbb{C}$  kümesinin bir reel vektör uzayı olduğunu gösterin. Bu vektör uzayının bir tabanının  $\{1, i\}$  olduğunu gösterin.

**Egzersiz 2.3.4.** Birer  $X, Y \neq \emptyset$  için  $X$  ve  $X \cup Y$  kümeleri, bir vektör uzayının iki tabanı olsun.  $X = Y$  olduğunu kanıtlayın.

**Egzersiz 2.3.5.**  $\mathbb{R}^3$  uzayında  $\{(3, 4, 5), (5, 12, 13), (7, 24, 25)\}$  kümesinin bir taban olduğunu gösterin.

**Egzersiz 2.3.6.**  $\mathbb{R}^3$  uzayında  $\{(0, 0, a), (0, b, a), (c, b, a)\}$  biçiminde  $a, b, c \neq 0$  olacak şekilde bir taban bulun.

**Egzersiz 2.3.7.** Boş küme tarafından üretilen bir uzayın,  $\{\vec{0}\}$  kümesine eşit olduğunu gösterin.

**Egzersiz 2.3.8.**  $\mathbb{R}^\infty = \{(a_1, a_2, \dots) : \forall i \in \mathbb{N}, a_i \in \mathbb{R}, \text{sonlu } i \text{ için } a_i \neq 0\}$  kümesini tanımlayalım. Bunun sonlu bir tabanı olmayan bir vektör uzayı olduğunu gösterin. Ayrıca  $\mathbb{R}^\infty = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{R}$  olduğunu gösterin.

**Egzersiz 2.3.9.**  $\mathbb{R}[x] = \{\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i : a_i \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N} (a_j = 0 \forall j \geq n)\}$  kümesi verilsin. Bu küme, reel katsayılı polinomlar kümesidir. Bu kümenin bir reel vektör uzayı olduğunu kanıtlayın. Ayrıca bu kümenin sonsuz üreteçli olduğunu gösterin.

**Egzersiz 2.3.10.**  $V$  bir sonsuz üreteçli vektör uzayıdır ancak ve ancak her en az bir sonsuz  $\{v_1, v_2, \dots\}$  kümesi vardır öyle ki her altkümesi doğrusal bağımsız olsun.

**Egzersiz 2.3.11.**  $\mathbb{R}_n[x]$  kümesi, reel katsayılı ve derecesi en fazla  $n$  olan polinomların kümesi olsun.  $\mathbb{R}_n[x]$  kümesinin sonlu üreteçli bir tabanı olduğunu kanıtlayın.

**Egzersiz 2.3.12.**  $\mathbb{R}$  kümesinin, rasyonel sayılar üzerinde bir vektör uzayıdır. Bu uzayın sonlu üreteçli olup olmadığını araştırın.

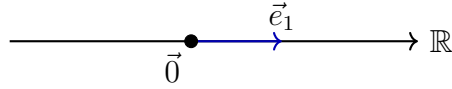
**Egzersiz 2.3.13.** Herhangi bir tabanın  $\vec{0}$  vektörünü içermediğini gösterin.

## 2.4 Boyut

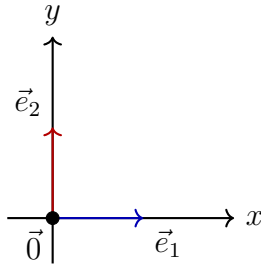
Önceki bölümde taban ile ilgili konuşmuştuk. Teorem 2.3.2 sayesinde her doğrusal bağımsız altkümenin en fazla bir üreteç kümesi olabileceğini gördük. Fakat tabanlar hem doğrusal bağımsız hem de bir üreteç kümesi olduğundan bu bizi daha özel bir konuyu incelemeye getiriyor. Örneğin  $X$  ve  $Y$ , aynı vektör uzayının iki tabanı olsun. İlk etapta  $X$ 'i doğrusal bağımsız ve  $Y$ 'yi üreteç kümesi olarak görelim. Böylece  $|X| \leq |Y|$  elde ederiz. Şimdi tam tersini düşünün;  $Y$  doğrusal bağımsız ve  $X$  üreteç kümesi olduğundan  $|Y| \leq |X|$  elde ederiz. Bu durumda  $|Y| = |X|$  elde edilir. Demek ki bir vektör uzayının her tabanı, eşit sayıda elemana sahipmiş. Bu özel sayıya vektör uzayının **boyutu** adı verilir ve  $\dim(V)$  olarak gösterilir. Bunu teorem olarak yazalım.

**Teorem 2.4.1.**  $X$  ve  $Y$ ,  $V$  uzayının iki tabanı olsun. O halde  $|X| = |Y|$  olur.

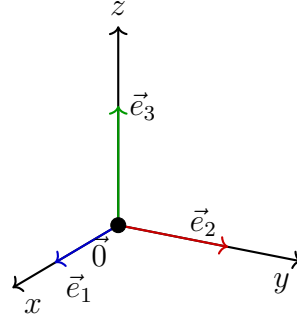
Bu kısa ve etkili teoremi kanıtlayabilmek için önceki altbölümde bayağı bir hazırlık yaptık. Şimdi ise meyvesini yeme vakti. Bir örnek vererek başlayalım. Egzersiz 2.2.7'ye geri dönelim. Her cismin sıfırdan farklı bir elemanla üretildiğini söyledik. Demek ki cisimler altında 1 boyutlu vektör uzaylarıymış. Ayrıca  $F^n$  uzayının  $n$  elemanlı kanonik tabanları olduğunu hatırlayalım. O halde  $F^n$ ,  $n$  boyutlu bir vektör uzayıdır.  $\mathbb{R}$  kümesi, yani sayı doğrusu, 1 boyutlu bir vektör uzayıdır.  $\mathbb{R}^2$ , yani düzlem, 2 boyutlu bir vektör uzayıdır. Aynı şekilde  $\mathbb{R}^3$ , yani uzay boşluğu 3 boyutlu bir vektör uzayıdır. Bu liste böyle gider.



Şekil 6: Kanonik  $\{e_1\}$  tabanıyla birlikte 1 boyutlu bir uzay



Şekil 7: Kanonik  $\{e_1, e_2\}$  tabanıyla birlikte 2 boyutlu bir uzay



Şekil 8: Kanonik  $\{e_1, e_2, e_3\}$  tabanıyla birlikte 3 boyutlu bir uzay

Bir örnek daha verelim. Reel polinomlar kümesini ( $\mathbb{R}[x]$ ) hatırlayalım. Egzersiz 2.3.9'da tanımını vermiştik. Derecesi en fazla  $n$  olan polinomların uzayını  $\mathbb{R}_n[x]$  olarak vermiştik. Bu uzayın standart tabanı  $\{0, x, x^2, \dots, x^n\}$  şeklindedir. O halde  $\dim(\mathbb{R}_n[x]) = n + 1$  yazabiliriz.

**Önsav 2.4.1.**  $V = U \oplus W$  olsun. O halde  $\dim(V) = \dim(U) + \dim(W)$  olur.

**Kanıt:**  $U$  ve  $W$  uzaylarının tabanlarının ayrık olduğunu göstermek yeterli. Fakat bu bariz, zira  $U \cap W = \{0\}$  olup 0 hiçbir tabanda bulunmayacağından  $U$  ve  $W$  uzaylarının tabanları ayrıktır. O halde Önsav 2.3.8'den sonuç gelir.  $\square$

Bu oldukça güçlü bir önerme, fakat daha genel bir halini kanıtlayabiliriz.

**Teorem 2.4.2.** Her  $U, V$  altuzayı için  $\dim(U + V) = \dim(U) + \dim(V) - \dim(U \cap V)$ .

**Kanıt:**  $E_1 = \{u_1, \dots, u_k\}$ ,  $U$ 'nun bir tabanı ve  $E_2 = \{v_1, \dots, v_m\}$ ,  $V$ 'nin bir tabanı olsun.  $E_1 \cup E_2$  kümesi,  $U + V = \langle U, V \rangle$  olduğundan,  $U + V$  için bir üreteç kümesidir.  $\dim(U) = k$  ve  $\dim(V) = m$  olduğunu not edin. Şimdi  $E = E_1 \cup E_2 = \{u_1, \dots, u_k, v_1, \dots, v_m\}$  kümesinden doğrusalbağımlı elemanları çıkarmayı deneyelim. Kaç tane doğrusal bağımlı eleman olduğunu bulmamız gerekecek. Eğer  $u_i \in U \cap V$  ise

$$u_i = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_m v_m$$

olacak biçimde  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$  skalerleri bulmak mümkündür. Böylece  $u_i$  elemanı ile  $E - \{u_i\}$  kümesinin elemanlarının doğrusal bağımlı olması için gerek ve yeter şartın  $u_i \in U \cap V$  olması gerektiğini buluruz. Bu da aynı zamanda  $u_i \in E_1 \cap E_2$  demektir. Böylece  $E - (E_1 \cap E_2)$  kümesinin doğrusal bağımsız olduğu sonucuna varırız. Böylece  $\dim(U + V) = k + m - |E_1 \cap E_2|$  buluruz.

Son olarak  $E_1 \cap E_2 \subseteq E_1$  bağıntısını kullanarak  $E_1$  doğrusal bağımsız olduğundan  $E_1 \cap E_2$ 'nin de doğrusal bağımsız olduğunu buluruz.  $E_1 \cap E_2$  kümesi,  $U \cap V$  uzayının bir tabanı olduğundan (neden?) kanıt biter.  $\square$

Böylece Önsav 2.3.8 olmadan da Önsav 2.4.1'i kanıtlayabiliriz.

**Sonuç 2.4.1.**  $U \cap V = \{0\}$  ise  $\dim(U + V) = \dim(U) + \dim(V)$  olur.

$U, V$ 'nin bir altuzayı olsun. Eğer  $\dim(U) = \dim(V)$  ise  $U$  ve  $V$  uzayları hakkında ne diyebiliriz? Sezgisel olarak  $U = V$  olması gerekiyor. Bunu kanıtlamak için Egzersiz 2.3.2'de geçen önermeyi kullanabiliriz. Öyle yapalım, denemekten zarar gelmez!

**Önsav 2.4.2.**  $U, V$ 'nin bir altuzayı olsun.  $\dim(U) = \dim(V)$  olması için gerek ve yeter şart  $U = V$  olmasıdır.

**Kanıt:**  $U = V$  ise  $\dim(U) = \dim(V)$  olduğu Teorem 2.4.1'den ötürü biliyoruz. Diğer yönü kanıtlayalım.  $\dim(U) = \dim(V) = n$  olsun.  $U$ 'nun herhangi bir  $E$  tabanını alalım.  $E \subseteq V$  olup bir doğrusal bağımsız kümedir. Bir  $X$  doğrusal bağımsız kümesi için  $E \subseteq X$  olması,  $E = X$  olması demektir, aksi halde Teorem 2.3.2 ile bir çelişki elde ederdik. Demek ki  $E$  doğrusal bağımsız maksimal bir küme. Demek ki  $E, V$ 'yi üretiyor. Demek ki  $U = V$ . Savımız böylece kanıtlandı.  $\square$

$U$  bir altuzay olmasaydı bu teorem doğru olmazdı. Örnek olarak  $\{(x, x, 0) : x \in \mathbb{R}^2\}$  ve  $\{(x, 0, x) : x \in \mathbb{R}^2\}$  uzaylarını ele alalım. Bu iki uzayın boyutu da 1'dir (kanıtlayın). Fakat iki uzay birbirine eşit değildir. Eğer iki uzaydan biri diğerini içerseydi işte o zaman eşit diyebilirdik. Bu konuda dikkatli olmak lazım. Şimdi sezgisel olan başka bir sonuç göstereyim.

**Önsav 2.4.3.**  $U, V$ 'nin altuzayı olsun.  $\dim(U) \leq \dim(V)$  geçerlidir.

**Kanıt:** Eğer  $U = V$  ise sonuç önceki önsavdan çıkar. Şimdi  $U \neq V$  alalım.  $\dim(U) > \dim(V)$  olsun. Demek ki  $V$ 'nin, doğrusal bağımsız olan ve boyutu  $\dim(V)$ 'den büyük olan bir küme var. Fakat bu imkansız. Demek ki  $U < V$  olmalıymış.  $\square$

**Sonuç 2.4.2.**  $V$  sonlu boyutlu bir uzaysa  $V$ 'nin her altuzayı sonlu boyutludur.

Bir  $V$  vektör uzayı ve onun bir  $W$  altuzayını düşünün. Daha öncesinde  $V/W$  ile gösterilen bir uzaydan bahsetmiştik. Bu uzay,  $v + W$  türü kosetlerden oluşuyor. Bazıları  $v + W$  yerine  $\bar{v}$  yazabilmektedir. Böylece  $(v + W) + (u + W) = (v + u) + W$  yerine  $\bar{v} + \bar{u} = \overline{v + u}$  yazarak yerden tasarruf edebiliriz.

Burada  $V$  eğer sonlu bir uzaysa; dikkat ediniz, “sonlu boyutlu” demiyorum; herhangi bir  $|W|$  sayısının  $|V|$ 'yi böldüğünü hatta,  $|V/W| = |V|/|W|$  eşitliğinin sağlandığını söyleriz. Bu olgu literatürde “Lagrange Teoremi” olarak geçer ve her temel grup teori kitabında kanıtı bulunur. Biz ise uzayların eleman sayıları gibi boyutları arasında nasıl bir ilişki olduğunu açıklamaya çalışacağız.

**Teorem 2.4.3.**  $V$  sonlu boyutlu bir vektör uzayı ve  $W$  onun bir altuzayı olsun. O halde

$$\dim(V/W) = \dim(V) - \dim(W)$$

eşitliği sağlanır.

**Kanıt:**  $W$ 'nin bir  $\{e_1, \dots, e_k\}$  tabanını alalım. Teorem 2.3.1 yardımıyla bu tabanı  $V$ 'nin bir  $\{e_1, \dots, e_k, \dots, e_n\}$  tabanına genişletebiliriz. Öncelikle  $\{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n\}$  kümesinin  $V/W$  uzayını ürettiğini göstereceğiz. Bu çok kolay, herhangi bir  $v \in V$  alalım. Bazı  $a_i$  skalerleri için

$$v = a_1e_1 + \dots + a_n e_n$$

yazabiliriz. Böylece;

$$\bar{v} = \overline{a_1e_1 + \dots + a_n e_n} = a_1\bar{e}_1 + \dots + a_n\bar{e}_n$$

eşitliğinden söz edebiliriz. Demek ki  $\langle \bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n \rangle = V/W$  oluyor.

Şimdi  $\dim(V) = n$  olduğunu gözlemleyin. Sonra da  $\dim(W) = k$  olduğunu gözlemleyin.  $\{e_1, \dots, e_k\}$  kümesinin her doğrusal kombinasyonu için

$$a_1\bar{e}_1 + \dots + a_n\bar{e}_k = \bar{0}$$

olduğunu görelim, çünkü  $e_1, \dots, e_k \in W$ 'dur. Demek ki  $\{e_1, \dots, e_k\}$  kümesi doğrusal bağımlıymış. Bu elemanları genişletilmiş tabandan çıkararak  $\{e_{k+1}, \dots, e_n\}$  kümesinin hala daha  $V/W$ 'yu ürettiğini görürüz. Bu elemanların doğrusal bağımsız olduğunu kanıtlamak yeterli olacaktır.

$$\overline{a_1e_{k+1} + \dots + e_n} = \bar{0}$$

varsayımını yapalım. Demek ki  $a_1e_{k+1} + \dots + a_n e_n \in W$  olmalıymış. Fakat  $\{e_1, \dots, e_k, \dots, e_n\}$  kümesi doğrusal bağımsız ve  $\{e_{k+1}, \dots, e_n\}$  kümesi de  $W$ 'nin dışındaki elemanlardan oluşuyor. O halde  $a_1e_{k+1} + \dots + a_n e_n \in W$  eşitliğinin sağlanması için gerek ve yeter şart  $a_1e_{k+1} + \dots + a_n e_n = 0$ , başka bir deyişle  $a_1 = \dots = a_n = 0$  olmasıymış. Bu da doğrusal bağımsızlığımızı kanıtlar. Böylece  $\dim(V/W) = n - k$  buluruz. □

Bu kanıtta daha açık etmek istediğim bir nokta var. Öyle ki;

$$\bar{v} = \overline{a_1e_1 + \dots + a_n e_n} = a_1\bar{e}_1 + \dots + a_n\bar{e}_n$$

eşitliğini yazabildiğimizi söyledik. Burada  $a_1\bar{e}_1 + \dots + a_n\bar{e}_k = \bar{0}$  eşitliğini kullanarak

$$\bar{v} = \overline{a_1e_1 + \dots + a_n e_n} = a_1\bar{e}_1 + \dots + a_n\bar{e}_n = a_1\bar{e}_{k+1} + \dots a_n\bar{e}_n$$

olduğunu görürdük. Böylece  $\langle \bar{e}_{k+1}, \dots, \bar{e}_n \rangle = V/W$  olduğunu daha açık görürdük. Bu teoremi anlamak ilerde önemli olacak. Bu kanıtı kullanarak bir şey daha gösterebilirdik.

**Teorem 2.4.4.**  $V$  uzayının her  $W$  altuzayı için öyle bir  $U$  altuzayı vardır ki  $V = W \oplus U$  olur.

**Kanıt:**  $W$ 'nin bir  $\{e_1, \dots, e_k\}$  tabanını alalım. Bu tabanı  $V$ 'nin bir  $\{e_1, \dots, e_n\}$  tabanına genişletebiliriz.  $\langle e_{k+1}, \dots, e_n \rangle := U$  olsun.  $U + W = V$  ve  $U \cap W = \{0\}$  olduğunu göstermemiz gerekecek.  $U + W = V$  olduğu bariz. Şimdi  $x \in U \cap W$  alalım.

$x = a_1e_1 + \dots + a_n e_n$  şeklinde yazabiliriz. Fakat  $W$  ile  $U$ 'nun bu tabanları ayrık olduğundan ve doğrusal bağımsızlıktan ötürü  $a_1 = \dots = a_n = 0$  elde ederiz. Bu da istediğimizi kanıtlar. □

## Egzersizler

**Egzersiz 2.4.1.**  $U = \{(x, 2y + z, -z) : x, y, z \in \mathbb{R}\}$  reel vektör uzayının,  $\mathbb{R}^3$ 'ün bir altuzayı olduğunu kanıtlayın. Bu altuzayın boyutunu bulun.

**Egzersiz 2.4.2.**  $V = \{(2x - 3t, t, -t, 5t + y) : x, y, t \in \mathbb{R}\}$  reel vektör uzayının,  $\mathbb{R}^4$ 'ün bir altuzayı olduğunu kanıtlayın. Bu altuzayın boyutunu bulun.

**Egzersiz 2.4.3.**  $W = \{(x, 0, 0, 3z + 2y + x) : x, y, z \in \mathbb{R}\}$  reel vektör uzayının,  $\mathbb{R}^4$ 'ün bir altuzayı olduğunu kanıtlayın. Bu altuzayın boyutunu bulun.

**Egzersiz 2.4.4.**  $S = \{p(x) \in \mathbb{R}_3[x] : p(2) = 0\}$  uzayının,  $\mathbb{R}_3[x]$  polinom kümesinin bir altuzayı olduğunu kanıtlayın. Bu altuzayın boyutunu bulun.

**Egzersiz 2.4.5.**  $V$  bir vektör uzay ve  $U$  onun bir altuzayı olsun.  $V$ 'nin her  $E$  tabanı için  $U$ 'nun öyle bir  $Y$  tabanı vardır ki  $Y \subseteq E$  olur. Bu önermenin doğru olup olmadığını gösterin.

### 3 Doğrusal Dönüşümler

Lineer cebire asıl giriş yaptığımız bölüme hoş geldiniz. Bundan sonra ne yapıp edeceksak doğrusal dönüşüm adını vereceğimiz birtakım özel fonksiyonlarla yapacağız. Bu bölüme gelene kadar bir vektör uzayının genel özelliklerini konuştuk. Artık vektör uzaylarının arasında köprü kurma vakti.

#### 3.1 Homomorfizmalar

Homomorfizma çok korkunç bir isim gibi duruyor. En azından benim için öyleydi. Fakat son derece basit bir tanımı var. Önce olayı kavramanız açısından bir örnek vereceğim.  $\mathbb{R}^2$  kümesinin  $W = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$  altuzayını düşünün. Bir de  $\mathbb{R}$  uzayını düşünün.  $\mathbb{R}$  ve  $W$  kesinlikle farklı kümelerdir. Zaten biri reel sayılar kümesi, diğeri de reel sayıların bir takım kartezyen çarpımlarından oluşuyor. Fakat bu iki uzay bunun dışında tamamen aynı! Vektör uzaylarında hepimiz topu iki adet işlem var: Toplama ve skalerle çarpma.  $\alpha$  reel sayısı ile  $x$  reel sayısının çarpımı normalde  $\alpha x$  verir. Öte yandan  $\alpha$  reel sayısının  $(x, 0)$  elemanı ile skaler çarpımı  $(\alpha x, 0)$  vektörünü verir. Toplama işleminde ise  $x + y$  toplamını yapmak ile  $(x, 0) + (y, 0) = (x + y, 0)$  toplamını yapmak gibi bir karşılaştırma yapabiliriz. Fark ettiyseniz bir tarafta ne işlem yapıyorsam öbür tarafta onun bir muadili var. Bu iki uzay, aynı küme olmamasına rağmen cebirsel olarak benzer özelliklere sahiptir. Bu tür uzaylara izomorf, ya da eşyapısal uzaylar denir ve bu uzayları doğrusal dönüşümler yardımıyla bağlarız.

**Tanım.**  $V$  ve  $W$ ,  $F$  üzerinde iki vektör uzayı olsun.  $T : V \rightarrow W$  fonksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa bu fonksiyonu bir **vektör uzayı homomorfizması** veya **doğrusal (lineer) dönüşüm** denir:

- i. Her  $x, y \in V$  için  $T(x + y) = T(x) + T(y)$ ,
- ii. Her  $x \in V$  ve her  $\alpha \in F$  için  $T(\alpha x) = \alpha T(x)$ .

Şimdi konuyu pekiştirmek adına bazı doğrusal dönüşüm örnekleri verelim. Bunlardan bazıları bariz örnekler olacak, onların doğrusal dönüşüm olup olmadığını kontrol etmeyi okura bırakıyoruz.

- $T(x) = 0$  sabit fonksiyonu, bariz bir doğrusal dönüşümdür.
- $Id(x) = x$  birim fonksiyonu da aynı şekilde bariz bir doğrusal dönüşümdür.
- $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  fonksiyonu,  $f(a + bi) = \overline{a + bi} = a - bi$  fonksiyonu bir doğrusal dönüşümdür. Zira, her  $x = a + bi, y = c + di \in \mathbb{C}$  için

$$f(x + y) = \overline{(a + c) + (b + d)i} = a + c - (b + d)i = (a - bi) + (c - di) = f(x) + f(y)$$

özelligi ve her  $\lambda \in \mathbb{R}$  için

$$f(\lambda x) = f(\lambda m + \lambda ni) = \lambda m - \lambda ni = \lambda(m - ni) = \lambda f(x)$$

özelligi sağlanır.

- $D^\infty = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ fonksiyonu sonsuza dek türevlenebilir}\}$  olmak üzere bu küme üzerinde  $T(f) = f'$  olsun.  $T(f + g) = (f + g)' = f' + g'$  ve  $T(af) = (af)' = af'$  özellikleri sağlandığından  $T$  bir doğrusal dönüşümdür.
- $D^\infty$  kümesi aynı şekilde tanımlansın.  $T : D^\infty \rightarrow D^\infty$  dönüşümünü  $T(f(x)) = \int f(x)dx$  tanımını yapalım. O halde  $T$  bir doğrusal dönüşümdür.
- $T : D \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonu,  $T(f(x)) = \int_0^1 f(x)dx$  dönüşümü doğrusaldır.
- $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  fonksiyonu sabit  $x_{i,j}$  sayıları için,

$$T(a_1, a_2, \dots, a_n) = (x_{1,1}a_1 + \dots + x_{1,n}a_n, \dots, x_{m,1}a_1 + \dots + x_{m,n}a_n)$$

kuralı ile verilen  $T$  fonksiyonu bir doğrusal dönüşümdür. Bunu kanıtlamamız gerekecek.  $v = (a_1, \dots, a_n)$  ve  $u = (b_1, \dots, b_n)$  verilsin. O halde

$$\begin{aligned} T(u + v) &= T(a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n) \\ &= \left( \sum_{i=1}^n x_{1,i}(a_1 + b_1), \dots, \sum_{i=1}^n x_{m,i}(a_n + b_n) \right) \\ &= \left( \sum_{i=1}^n x_{1,i}a_1 + \sum_{i=1}^n x_{1,i}b_1, \dots, \sum_{i=1}^n x_{m,i}a_n + \sum_{i=1}^n x_{m,i}b_n \right) \\ &= \left( \sum_{i=1}^n x_{1,i}a_1, \dots, \sum_{i=1}^n x_{m,i}a_n \right) + \left( \sum_{i=1}^n x_{1,i}b_1, \dots, \sum_{i=1}^n x_{m,i}b_n \right) \\ &= T(a_1, \dots, a_n) + T(b_1, \dots, b_n) \\ &= T(v) + T(u). \end{aligned}$$

Aynı şekilde skaler ile çarpma işleminin de doğrusal dönüşüm özelliğini göstermemiz gerekecek. Onu da yapalım:

$$\begin{aligned} T(\beta v) &= T(\beta a_1, \dots, \beta a_n) \\ &= \left( \sum_{i=1}^n x_{1,i}(\beta a_1), \dots, \sum_{i=1}^n x_{m,i}(\beta a_n) \right) \\ &= \left( \beta \sum_{i=1}^n x_{1,i}(a_1), \dots, \beta \sum_{i=1}^n x_{m,i}(a_n) \right) \\ &= \beta \left( \sum_{i=1}^n x_{1,i}(a_1), \dots, \sum_{i=1}^n x_{m,i}(a_n) \right) \\ &= \beta T(a_1, \dots, a_n) \\ &= \beta T(v). \end{aligned}$$

Biraz uzun ve meşakkatli bir hesap oldu fakat değdi. Artık gönül rahatlığıyla  $T$  bir doğrusal dönüşümdür diyebiliriz.

- $T : V^n \rightarrow V^n$  dönüşümü,  $T(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = (x_2, x_3, \dots, x_n, x_1)$  olarak tanımlansın. Bu dönüşüm doğrusaldır.
- Benzer olarak  $T : \mathbb{R}^\infty \rightarrow \mathbb{R}^\infty$  fonksiyonu,  $T(x_1, x_2, x_3, \dots) = (x_2, x_3, \dots)$  kuralı ile bir doğrusal dönüşümdür.
- $\pi : V \rightarrow V/W$  fonksiyonu  $f(v) = \bar{v}$  olarak tanımlansın. Bu bir doğrusal dönüşümdür ve **doğal izdüşüm** ya da **kanonik homomorfizma** adını alır.

Bazı kaynaklarda  $T(x)$  yerine  $Tx$  yazıldığını da görebilirsiniz. Bir örneği zaten verdik:  $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  fonksiyonu,  $T(x) = (x, 0)$  kuralı ile bir doğrusal dönüşümdür. Önceki paragraflarda bazı cebirsel yapıların doğrusal dönüşüm altında korunduğunu iddia etmiştik. Ne demek istediğimizi bir sonraki önsavla birlikte açmış olalım.

**Önsav 3.1.1.**  $T : V \rightarrow W$  bir doğrusal dönüşüm olsun. Aşağıdaki özellikler sağlanır:

i.  $T(0) = 0$

ii.  $T(-x) = -T(x)$

**Kanıt:** i. Öncelikle basit bir şekilde  $T(0) = T(0 + 0) = T(0) + T(0)$  yazalım. Eşitliğin sol ve sağ tarafına  $-T(0)$  eklersek istediğimizi elde ederiz.

ii. Herhangi bir  $v \in V$  vektörü alalım.  $0 = T(0) = T(x + (-x)) = T(x) + T(-x)$  eşitliği sağlanıyor olmalı. Demek ki  $T(-x)$  vektörü,  $T(x)$ 'in toplamaya göre tersiymiş. Bu durumda  $T(-x) = -T(x)$  yazabiliriz.  $\square$

**Önsav 3.1.2.**  $T : V \rightarrow W$  bir doğrusal dönüşüm olsun ve  $\langle X \rangle = V$  varsayımını yapalım. O halde  $\langle T(X) \rangle = T(V)$ .

Yani dememiz odur ki  $X$  bir üreteç kümesi ise  $f(X)$  de görüntü kümesinin bir üretecidir.

**Kanıt:** Herhangi bir  $w \in T(V)$  alalım. O halde öyle bir  $v \in V$  vardır ki  $T(v) = w$  olur. Fakat biz bazı  $a_i$  skalerleri ve  $e_i \in X$  için;

$$v = a_1 e_1 + \dots + a_n e_n$$

yazabiliyoruz. O halde;

$$T(v) = T(a_1 e_1 + \dots + a_n e_n)$$

yazabiliriz. Birleşme özelliğini kullanarak bu vektörün bileşenlerini teker teker ayıralım:

$$T((a_1 e_1 + \dots + a_{n-1} e_{n-1}) + a_n e_n)$$

yazabiliriz. Bu da;

$$T(v) = T(a_1 e_1 + \dots + a_{n-1} e_{n-1}) + T(a_n e_n) = T(a_1 e_1 + \dots + a_{n-1} e_{n-1}) + a_n T(e_n)$$

demektir. Tümevarımın kadim gücünü kullanarak buradan;

$$w = T(v) = a_1 T(e_1) + \dots + a_n T(e_n)$$

sonucuna varırız. Demek ki  $\langle T(e_1), \dots, T(e_n) \rangle = T(V)$  oluyormuş gerçekten de.  $\square$

Henüz tabanlar hakkında bir şey söylemedik. Bir üreteç kümesi, görüntü kümesine geçiyor geçmesine ama tabanlar korunmak zorunda değil. Örneğin,  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  fonksiyonunu  $T(x, y, z) = (x + y, y + z)$  kuralı ile tanımlayalım.  $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$  kümesi, tanım kümesinin bir tabanı olmasına rağmen bu kümenin  $T$  altındaki görüntüsü olan  $\{(1, 0), (1, 1), (0, 1)\}$  kümesi görüntü kümesinin bir tabanı değildir çünkü doğrusal bağımlıdır. Gördüğümüz gibi doğrusal bağımsızlık da korunmak zorunda değil. Fakat eğer iki uzayın boyutları aynı olsaydı tabanları koruyan bir fonksiyon yazabilirdik. Dikkat edin, yazağımız fonksiyon her tabanı korumak zorunda değil. Her bir taban için onu koruyan bir fonksiyon bulabiliriz.

**Önsav 3.1.3.**  $V$  ve  $W$ ,  $\dim(V) = \dim(W)$  olacak biçimde birer vektör uzayı olsun.  $\{v_1, \dots, v_n\}$  kümesi  $V$ 'nin,  $\{w_1, \dots, w_n\}$  kümesi de  $W$ 'nin bir tabanı olsun. O halde öyle bir ve bir tek  $T : V \rightarrow W$  doğrusal dönüşümü vardır ki her  $1 \leq k \leq n$  için  $T(v_k) = w_k$  olsun.

**Kanıt:** Öncelikle böyle bir fonksiyonun varlığını kanıtlayalım. Bunun için fonksiyonu inşa etmemiz gerekecek. Fonksiyonumuz, her  $c_1, \dots, c_n$  skalerleri için

$$T(c_1v_1 + \dots + c_nv_n) = c_1w_1 + \dots + c_nw_n$$

olacak şekilde tanımlansın. Bu dönüşümün iyi tanımlı olduğunu gösterelim. Diyelim  $v = u$ . O halde öyle  $\beta_1, \dots, \beta_n$  vardır ki  $v = u = \beta_1v_1 + \dots + \beta_nv_n$  yazılımı tek türlü olur. Ayrıca  $w_1, \dots, w_n$  vektörleri bir taban oluşturduğundan her türlü doğrusal kombinasyonları da tek türüdür. O halde

$$T(v) = T(\beta_1v_1 + \dots + \beta_nv_n) = \beta_1w_1 + \dots + \beta_nw_n = fT\beta_1v_1 + \dots + \beta_nv_n) = T(u)$$

olur. Bu kısım aslında barizdi, yine de açıklamak istedim.  $c_i = \delta_{i,j}$  olacak şekilde seçelim. Böylece bu fonksiyonun  $T(v_i) = w_i$  kısmı sağlanır. Doğrusal olduğunu gösterelim.

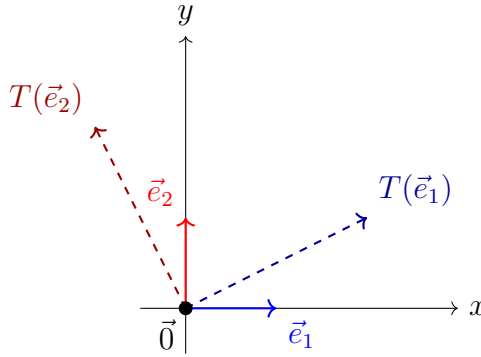
- Fonksiyonun toplama işlemini ayırdığını gösterelim:

$$\begin{aligned} T(v + w) &= T\left(\sum_{i=1}^n a_iv_i + \sum_{i=1}^n b_iv_i\right) \\ &= T\left(\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)v_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^n (a_i + b_i)w_i \\ &= \sum_{i=1}^n a_iw_i + \sum_{i=1}^n b_iw_i \\ &= T\left(\sum_{i=1}^n a_iv_i\right) + T\left(\sum_{i=1}^n b_iv_i\right) \\ &= T(v) + T(w). \end{aligned}$$

- Şimdi de skalerle çarpmaya saygı duyulduğunu gösterelim:

$$\begin{aligned}
T(\alpha v) &= T\left(\alpha\left(\sum_{i=1}^n \beta_i v_i\right)\right) \\
&= T\left(\sum_{i=1}^n \alpha\beta_i v_i\right) \\
&= \sum_{i=1}^n \alpha\beta_i w_i \\
&= \alpha \sum_{i=1}^n \beta_i w_i \\
&= \alpha T\left(\sum_{i=1}^n \beta_i v_i\right) \\
&= \alpha T(v).
\end{aligned}$$

Böylece  $T$ 'nin bir doğrusal dönüşüm olduğu da kanıtlanmış oldu. Şimdi bu fonksiyondan yalnızca bir tane olduğunu kanıtlayalım. Fakat bu çok açık. Zira her vektör, söz konusu tabanın elemanlarının doğrusal kombinasyonu olarak tek türlü yazılıyor. Ayrıca fonksiyonun görüntüsü de taban elemanlarından oluştuğu için görüntü de tek türlü ifade ediyor. O halde vektörlerin görüntüleri tek türlü belirleniyor. Demek ki fonksiyon da tekmiş.  $\square$



Şekil 9: İki taban vektörünü dönüştüren bir uzay

Doğrusal dönüşümlerle ilgili yeterince bilgi edindiğimizi umuyorum. Doğrusal dönüşümlerin iki uzay arasında ilişkiler kurduğunu gördük. Fakat doğrusal dönüşümlerin kendi başına bir vektör uzayı olduğunu biliyor muydunuz?  $Func(S, F)$  kümesinin bir vektör uzayı olduğunu biliyoruz. Burada  $S$  boş olmayan herhangi bir küme ve  $F$  bir cisim idi. Aynı şey bir  $V$  vektör uzayı için  $Func(S, V)$  kümesi için de geçerli. Kanıtı yine bölüm 1.3'te yaptığımız gibi. Doğrusal dönüşümlerin,  $Func(S, V)$  kümesinin bir altuzayı olduğunu göstereceğiz.

**Tanım.**  $V$  ve  $W$  birer vektör uzayı olmak üzere

$$\text{Hom}(V, W) := \{f : V \rightarrow W \mid f \text{ bir homomorfizma}\}$$

kümesini tanımlayalım. Eğer  $V = W$  ise  $\text{Hom}(V, V)$  yerine  $\text{End}(V)$  yazacağız ve bu kümenin elemanlarına **endomorfizma** adını vereceğiz.

Şimdi iki adet  $f, g \in \text{Hom}(V, W)$  ve  $\alpha, \beta$  skaleri alalım. O halde her  $x, y \in V$  için,

$$\begin{aligned}(\alpha f + \beta g)(x + y) &= (\alpha f)(x + y) + (\beta g)(x + y) \\ &= \alpha(f(x + y)) + \beta(g(x + y)) \\ &= \alpha(f(x) + f(y)) + \beta(g(x) + g(y)) \\ &= \alpha f(x) + \alpha f(y) + \beta g(x) + \beta g(y) \\ &= (\alpha f(x) + \beta g(x)) + (\alpha f(y) + \beta g(y)) \\ &= (\alpha f + \beta g)(x) + (\alpha f + \beta g)(y)\end{aligned}$$

elde ederiz. O halde buradan  $\alpha f + \beta g \in \text{Hom}(V, W)$  çıkar, desem yalan olur. Bunun için  $\text{Hom}(V, W)$  kümesinin boş olmadığını göstermemiz gerekliydi. Fakat sabit sıfır fonksiyonu bariz bir homomorfizma olduğu için bu kümenin boş olmadığını da biliyoruz. Demek ki  $\text{Hom}(V, W)$ ,  $\text{Func}(V, W)$  uzayının bir altuzayı imiş. Benzer şekilde  $\text{End}(V)$  kümesi de  $\text{Func}(V, V)$  kümesinin bir altuzayıdır.

$V = W$  olduğu zaman  $\text{Func}(V, W)$  uzayının işlemleri toplama ve skalerle çarpmadan ibaret değildir. Aşına olabileceğiniz üzere fonksiyonlarla bileşke işlemi de  $\text{Func}(V, W)$  üzerinde bir ikili işlemdir.  $V \neq W$  olduğu zaman fazla bir şey söyleyemeyiz. Örneğin  $f : \mathbb{Z}^{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \sqrt{x}$  fonksiyonunu düşünelim.  $f \circ f$  işlemi bir fonksiyon vermez. Nitekim  $x = 2$  alırsak  $f(f(2)) = f(\sqrt{2})$  olması gerekir fakat  $\sqrt{2} \notin \mathbb{Z}$ . Dolayısıyla fonksiyon bileşkesinin ikili işlem olabilmesi için üzerinde tanımlı olduğu küme ile değer kümesi aynı olmalıdır. Dolayısıyla bileşke işleminin  $\text{End}(V)$  üzerinde bir işlem belirttiğini söyleyebiliriz. Bu işlemin bazı özelliklerine bakalım.

**Önsav 3.1.4.**  $f, g, h \in \text{End}(V)$ ,  $\alpha$  bir skaler olsun. Aşağıdaki özellikler sağlanır:

- i.  $f \circ g \in \text{End}(V)$ ,
- ii.  $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$
- iii.  $f \circ (g + h) = f \circ g + f \circ h$ ,
- iv.  $(f + g) \circ h = f \circ h + g \circ h$ ,
- v.  $f \circ (\alpha g) = \alpha(f \circ g)$ .

**Kanıt:** Birinci önermeyi kanıtlayalım. Herhangi  $x, y \in V$  için,

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x + y) &= f(g(x + y)) \\ &= f(g(x) + g(y)) \\ &= f(g(x)) + f(g(y)) \\ &= (f \circ g)(x) + (f \circ g)(y)\end{aligned}$$

elde ederiz. Şimdi keyfi bir  $\alpha$  skaleri alalım. Buradan

$$\begin{aligned}(f \circ g)(\alpha x) &= f(g(\alpha x)) \\ &= f(\alpha g(x)) \\ &= \alpha f(g(x)) \\ &= \alpha(f \circ g)(x)\end{aligned}$$

çıkar. Bu son adım hem beşinci önermeyi hem de birinci önermeyi kanıtlar. Üçüncü önermeye geçelim. Keyfi bir  $x \in V$  alalım.

$$\begin{aligned}f \circ (g + h)(x) &= f((g + h)(x)) \\ &= f(g(x) + h(x)) \\ &= f(g(x)) + f(h(x)) \\ &= (f \circ g)(x) + (f \circ h)(x)\end{aligned}$$

olur. Buna benzer olarak dördüncü önerme de kanıtlanır. Kanıtın o kısmı egzersiz olarak okura bırakılmıştır. İkinci önermeyi ise her fonksiyon sağlar. Nitekim

$$(f \circ (g \circ h))(x) = f((g \circ h)(x)) = f(g(h(x))) = (f \circ g)(h(x)) = ((f \circ g) \circ h)(x)$$

eşitliği her  $x$  için sağlanır. □

Bazı kaynakların birebir homomorfizmalar için **monomorfizma**, örten homomorfizmaları için ise **epimorfizma** isimlerini kullandıklarını görebilirsiniz. Genel kültür olarak kalsın, biz bu kitapta bu isimlendirmeleri hiç kullanmayacağız. Eğer bir homomorfizma hem birebir hem de örten ise o homomorfizmaya bir **izomorfizma** adı verilir. Hem izomorfizma hem de endomorfizma olan bir dönüşüme **otomorfizma** adı verilir. Eğer iki vektör uzayı arasında bir izomorfizma yazılabiliyorsa bu iki uzaya **izomorf vektör uzayları** denir. Homomorfizmalar için kanıtladığımız her şey doğal olarak izomorfizmalar için de geçerlidir. İki izomorf  $V$  ve  $W$  vektör uzayını  $V \cong W$  olarak ifade ederiz. Buradaki “ $\cong$ ” bağıntısı, iki uzay arasında en az bir izomorfizma olduğunu söyler ve bu bağıntı bir denklik bağıntısıdır.

- (Yansıma) Her zaman  $V \cong V$  geçerlidir zira  $Id : V \rightarrow V$  birim fonksiyonu bir izomorfizmadır.
- (Simetri) Eğer  $V \cong W$  ise  $W \cong V$  geçerlidir. Bunu göstermek için bir  $T : V \rightarrow W$  izomorfizması alalım. Birebir ve örten olduğu için bu dönüşümün bir tersi vardır. Şimdi  $T^{-1} : W \rightarrow V$  fonksiyonunun da bir izomorfizma olduğunu kanıtlayalım:
  - I.  $x, y \in W$  alalım. O halde  $T(v) = x$  ve  $T(u) = y$  olacak şekilde  $v, u \in V$  vardır.  $T(u + v) = x + y$  eşitliğinde her iki tarafa  $T^{-1}$  uygularsak  $T^{-1}(x) + T^{-1}(y) = u + v = T^{-1}(x + y)$  elde ederiz.
  - II. Keyfi bir  $\alpha$  skaleri ve  $x \in W$  alalım. Önceki maddede yaptığımız gibi  $T(v) = x$  olsun. Bu durumda  $\alpha x = \alpha T(v) = T(\alpha v)$  çıkar. Eşitliğin en sağ ve en sol tarafına  $T^{-1}$  uygularsak  $T^{-1}(\alpha x) = \alpha v$  elde ederiz. Bu da doğrusallığı kanıtlar.

$T^{-1} : W \rightarrow V$  bir izomorfizma olduğundan simetri özelliği de sağlanır.

- (Geçişme)  $V \cong W$  ve  $W \cong U$  olsun. O halde  $T : V \rightarrow W$  ve  $S : W \rightarrow U$  yazabiliriz. Önsav 3.1.4'ün ilk maddesini kanıtlarken yaptığımız hesapları tekrardan yaparak  $S \circ T : V \rightarrow U$  fonksiyonunun da bir izomorfizma olduğunu gözlemleriz. Buradan  $V \cong U$  çıkar.

Bunu şöyle düşünün; elimizde sarı ve mavi futbol topları var. Bu topların ikisi ile de verimli bir basketbol maçı yapamayız. Fakat her ne kadar birbirinden farklı olsa da sarı ve mavi toplarla aynı hareketleri; gol, pas, çalım vs. yapabiliriz. Bu, sarı ve mavi topu aynı sınıfta değerlendirebileceğimiz anlamına gelir. Bazı kümeler ne kadar farklı olsa da cebirsel özellikleri aynı olabilir. İzomorfizma kavramı da tam olarak bu aynı özellikleri taşıyan uzayları tanımlar. Başta verdiğim  $\mathbb{R}$  ve  $\{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$  örneği de tam olarak bunu anlatıyordu. Doğrusal dönüşümlerde doğrusal bağımsızlığın korunmak zorunda olmadığını söylemiştik. Fakat izomorfizmalarda bu özellik de korunur.

**Önsav 3.1.5.**  $T : V \rightarrow W$  bir izomorfizma olsun.  $X \subseteq V$  kümesinin doğrusal bağımsız olması için gerek ve yeter şart  $T(X) \subseteq W$  kümesinin doğrusal bağımsız olmasıdır.

**Kanıt:**  $X$  doğrusal bağımsız olsun.  $T(X)$ 'in herhangi bir sonlu  $(w_i)$  eleman topluluğunu alalım ve her  $i$  için  $T(v_i) = w_i$  olsun.

$$\sum a_i w_i = 0$$

olsun. O halde

$$T^{-1}\left(\sum a_i w_i\right) = 0$$

olmalıdır, zira  $T$  birebir olduğundan  $T(x) = 0$  ise Önsav 3.1.1'in ilk maddesinden dolayı  $x = 0$  olmak zorundadır. Demek ki,

$$0 = T^{-1}\left(\sum a_i w_i\right) = \sum (T^{-1}(a_i w_i)) = \sum a_i T^{-1}(w_i) = \sum a_i v_i$$

yazabilir. Fakat  $X$ 'in doğrusal bağımsız olduğunu biliyoruz. O halde her  $i$  için  $a_i = 0$  olmalıymış O halde  $T(X)$  doğrusal bağımsızdır. Simetriden dolayı önermenin tersi de doğrudur. Bu da önsavı kanıtlar.  $\square$

**Sonuç 3.1.1.**  $T : V \rightarrow W$  bir izomorfizma ve  $E \subseteq V$  bir taban olsun. O halde  $T(E)$  kümesi de  $W$  uzayının bir tabanıdır.

**Sonuç 3.1.2.**  $V \cong W$  ise  $\dim(V) = \dim(W)$  sağlanır.

Görüldüğü gibi doğrusal bağımsızlık da artık korunuyor. Ayrıca Önsav 3.1.2'den ötürü üreteçlik de korunur. Bu da bize Sonuç 3.1.1'i verir, o da Sonuç 3.1.2'yi verir. Boyut korunuyor, altkümelerin doğrusal bağımsızlığı korunuyor, işlemler korunuyor... Demek ki izomorf uzaylar bayağı bayağı benzer uzaylarmış.

## Egzersizler

**Egzersiz 3.1.1.**  $V, W$  birer vektör uzayı ve  $T : V \rightarrow W$  bir doğrusal dönüşüm olsun.  $T(V)$  kümesinin,  $W$ 'nin bir altuzayı olduğunu kanıtlayın.

**Egzersiz 3.1.2.**  $n > m > 0$  tamsayıları için  $T : F^m \rightarrow F^n$  fonksiyonu,  $T(a_1, \dots, a_m) = (b_1, \dots, b_n)$  tanımını  $b_i = a_i$  veya  $b_i = 0$  olacak biçimde yapalım. Böyle bir fonksiyonun izomorfizma olduğunu kanıtlayın.

**Egzersiz 3.1.3.**  $V$  bir uzay ve  $W$  herhangi bir altuzay ise  $V = W \oplus U$  olacak biçimde bir  $U$  altuzayının varlığından bahsetmiştik.  $U \cong V/W$  olduğunu kanıtlayın.

**İpucu:**  $W$ 'nin bir tabanını  $V$ 'nin bir tabanına genişletin. Yeni eklediğiniz elemanlar ile onların doğal izdüşümleri arasında Önsav 3.1.3'ü uygulayıp bu fonksiyonun bir izomorfizma olduğunu gösterin.

**Egzersiz 3.1.4.**  $U, V$  ve  $W$  birer vektör uzayı olsun.  $T : V \rightarrow U$  ve  $S : U \rightarrow W$  birer doğrusal dönüşüm olsun.  $S \circ T$ 'nin bir doğrusal dönüşüm olduğunu gösterin.

**Egzersiz 3.1.5.** Herhangi bir  $p(x) \in \mathbb{R}[x]$  alalım.  $T : \mathbb{R}[x] \rightarrow \mathbb{R}[x]$  dönüşümünü  $T(q(x)) = p(x) \circ q(x)$  olarak tanımlayalım.  $T$ 'nin bir doğrusal dönüşüm olmadığını gösterin.

## 3.2 Çekirdek

Bu bölümde doğrusal dönüşümlerin birebirliği ile ilgili konuşacağız. Bir  $T$  dönüşümünün birebir olması için  $T(x) = T(y)$  sağlandığında  $x = y$  olması gerekir. Buna eş değer bir koşulu çekirdek sayesinde vereceğiz.

**Tanım.**  $T : V \rightarrow W$  bir doğrusal dönüşüm olsun. O halde

$$\ker T := \{x \in V : T(x) = 0\}$$

kümesine  $T$ 'nin çekirdeği (kernel) adı verilir.

Bazen bu uzaya çekirdek yerine  $T$ 'nin **boş uzayı** dendiğini de görebilirsiniz. Boş uzay için  $\ker T$  yerine  $\text{null}(T)$  kullanılır. İkisi de aynı şeydir, biz bu kitapta  $\ker T$  demeyi tercih edeceğiz. Çekirdek  $V$ 'nin bir altuzayıdır. Bunun için önce  $T(0) = 0$  olduğundan  $0 \in \ker T$  olduğunu görelim. Demek ki  $\ker T \neq \emptyset$ . Şimdi keyfi  $\alpha, \beta$  skalerleri ve  $x, y \in \ker T$  için  $T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y) = \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 = 0 + 0 = 0$  olduğunu görelim. Buradan  $\alpha x + \beta y \in \ker T$  olduğu çıkar. Böylece  $\ker T$ 'nin bir altuzay olduğundan bahsedebiliriz.

**Teorem 3.2.1.**  $T : V \rightarrow W$  bir doğrusal dönüşüm olmak üzere aşağıdaki önermeler eş değerdir:

1.  $T$  birebirdir.
2.  $|\ker T| = 1$ .
3.  $\ker T = \{0\}$ .

**Kanıt:** Her vektör uzayı 0 elemanını içermek zorundadır. Bu yüzden uzayın tek elemanlı olması için gerek ve yeter şart o uzayın  $\{0\}$  kümesine eşit olmasıdır. Bu kısım bariz. Şimdi birinci ile üçüncü önermenin denklğini gösterelim.

$T$  birebir olsun ve  $x \in \ker T$  alalım.  $T(x) = 0 = T(0)$  eşitliğini göz önüne alırsak  $T$  birebir olduğundan  $x = 0$  olmalıdır. Dolayısıyla çekirdeğin her elemanı 0 imiş. O halde  $\ker T = \{0\}$ . Şimdi ters yönü kanıtlayalım.  $\ker T = \{0\}$  olsun. Eğer  $T(x) = T(y)$  ise buradan,  $0 = T(x) - T(y) = T(x) + T(-y) = T(x - y)$  olduğu çıkar. O halde  $x - y \in \{0\}$  olmalı fakat çekirdeğin tek elemanı 0 olduğundan  $x - y = 0$  olmalı. Bu da  $x = y$  demektir. Birebirlik kanıtlandı.  $\square$

Böylece çekirdeği tek elemandan oluşan dönüşümlerin birebir olduğu sonucuna varırız.  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  fonksiyonu,  $\phi(x) = (x, 5x)$  olarak tanımlansın. Bu bir doğrusal dönüşümdür.

$$\begin{aligned}\ker \varphi &= \{x \in \mathbb{R} : \varphi(x) = (0, 0)\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : (x, 5x) = (0, 0)\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : x = 0 \ \& \ 5x = 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : x = 0\} = \{0\}\end{aligned}$$

olduğundan  $\varphi$  dönüşümünün Teorem 3.2.1'den ötürü birebir olduğunu söyleriz. Birçok birebirlik kanıtında bu olguyu kullanacağız. Bir sonraki teorem için bir  $X$  kümesinin görüntüsünün  $f(X) = \{f(x) : x \in X\}$  olduğunu hatırlayalım.

**Teorem 3.2.2** (Birinci İzomorfizma Teoremi).  $\varphi : V \rightarrow W$  bir doğrusal dönüşüm olsun. O halde  $V/\ker \varphi \cong \varphi(V)$  sağlanır.

**Kanıt:**  $\vartheta : V/\ker \varphi \rightarrow \varphi(V)$  fonksiyonunu  $\vartheta(\bar{x}) = \varphi(x)$  şeklinde tanımlayalım.  $\varphi$  iyi tanımlı olduğundan  $\vartheta$  da iyi tanımlıdır.  $\bar{x}, \bar{y} \in V/\ker \varphi$  olsun. Böylece

$$\vartheta(\bar{x} + \bar{y}) = \vartheta(\overline{x+y}) = \varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y) = \vartheta(\bar{x}) + \vartheta(\bar{y})$$

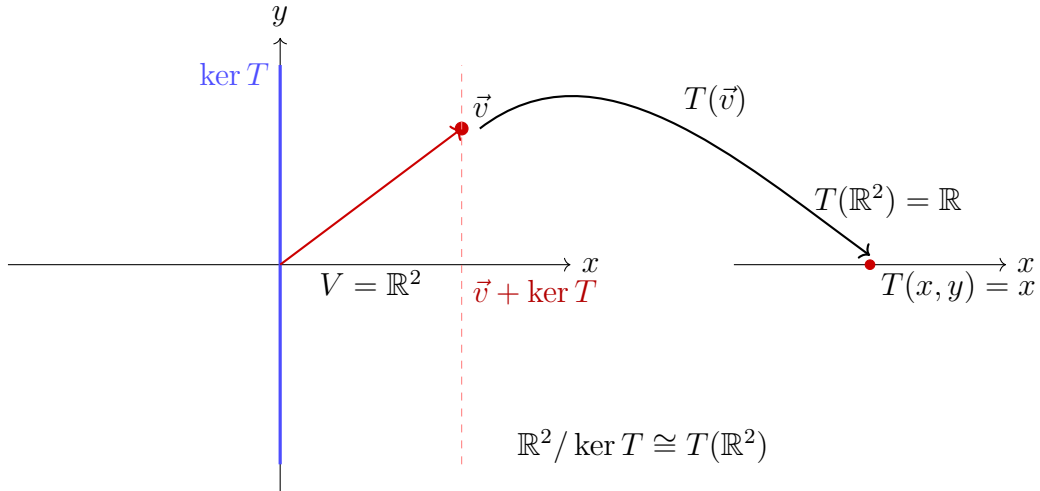
elde ederiz. Ayrıca herhangi bir  $\alpha$  skaleri için

$$\vartheta(\alpha\bar{x}) = \vartheta(\overline{\alpha x}) = \varphi(\alpha x) = \alpha\varphi(x) = \alpha\vartheta(\bar{x})$$

sağlandığı görülür. Demek ki  $\vartheta$  bir doğrusal dönüşümdür. Şimdi birebir ve örtenliği kanıtlayalım. Birebirlik için  $\ker \vartheta$  kümesine bakabiliriz:

$$\begin{aligned} \ker \vartheta &= \{\bar{x} \in V/\ker \varphi : \vartheta(\bar{x}) = 0\} \\ &= \{\bar{x} \in V/\ker \varphi : \varphi(x) = 0\} \\ &= \{\{x \in V : \varphi(x) = 0\}\} \\ &= \{\ker \varphi\} \\ &= \{\bar{0}\}. \end{aligned}$$

Demek ki  $\vartheta$  birebirmiştir. Şimdi bir  $u \in \varphi(V)$  alalım. Bir  $v \in V$  için  $\varphi(v) = u$  olmalı, bu da  $\vartheta(v) = \varphi(v) = u$  demektir. Demek ki  $\vartheta$  örtenmiştir. O halde aranan izomorfizma kanıtlanmış oldu.  $\square$



Şekil 10:  $T(x, y) = x$  dönüşümü için Birinci İzomorfizma Teoremi

**Sonuç 3.2.1.**  $T : V \rightarrow W$  bir doğrusal dönüşüm olsun.  $V = \ker T \oplus U$  ve  $U \cong V/\ker T$  olacak biçimde bir  $U$  altuzayı vardır.

Bu, Egzersiz 3.1.3'ün özel bir halidir. Birinci izomorfizma teoreminin verdiği önemli bir sonuç daha var.

**Teorem 3.2.3** (Doğrusal Dönüşümlerin Temel Teoremi).  $T : V \rightarrow W$  bir doğrusal dönüşüm olsun. Bu durumda

$$\dim(V) = \dim(\ker T) + \dim(T(V))$$

sağlanır.

**Kanıt:** Birinci izomorfizma teoreminden ötürü  $T(V) \cong V/\ker T$  sağlanır. Demek ki  $\dim(T(V)) = \dim(V/\ker T)$ . Öte yandan Teorem 2.4.3 yardımı ile  $\dim(V/\ker T) = \dim(V) - \dim(\ker T)$  elde ederiz. İki eşitliği birleştirerek,

$$\dim(T(V)) = \dim(V) - \dim(\ker T)$$

elde ederiz. Eşitliğin sağ tarafındaki  $\dim(\ker T)$  terimini sola atarsak aradığımız eşitliği bulmuş oluruz.  $\square$

**Sonuç 3.2.2.**  $T : V \rightarrow W$  birebir bir doğrusal dönüşüm olsun. O halde  $\dim(V) \leq \dim(W)$  olur.

**Kanıt:** Boyut Teoreminden  $\dim(V) = \dim(\ker T) + \dim(T(V))$  olduğunu not edelim. Fakat  $\{0\} = \ker T$  uzayının boyutu 0 olduğundan  $\dim(V) = \dim(T(V))$  elde ederiz.  $T(V)$ ,  $W$ 'nin bir altuzayı olduğundan buradan

$$\dim(V) = \dim(T(V)) \leq \dim(W)$$

çıkar.  $\square$

Buradan anlaşılıyor ki eğer  $\dim(V) > \dim(W)$  ise hiçbir  $T : V \rightarrow W$  doğrusal dönüşümü birebir olamaz.

**Sonuç 3.2.3.**  $T : V \rightarrow W$  örten olsun. O halde  $\dim(W) \leq \dim(V)$  olur. Örtenlikten ötürü  $T(V) = W$  yazabiliriz. O halde boyut teoreminden ötürü

$$\dim(V) = \dim(\ker T) + \dim(W)$$

yazılabilir. Bu da aynen  $\dim(W) \leq \dim(V)$  demektir.

Bu önermenin karşıt tersi de diyor ki  $\dim(W) > \dim(V)$  ise hiçbir  $T : V \rightarrow W$  fonksiyonu örten olamaz.

**Teorem 3.2.4.**  $\dim(V) = \dim(W)$  olmak üzere  $\varphi \in \text{Hom}(V, W)$  olsun. Aşağıdaki önermeler eşdeğerdir:

i.  $\varphi$  birebirdir,

ii.  $\varphi$  örtendir,

iii.  $\varphi$  bir izomorfizmadır.

**Kanıt:**  $\varphi$  birebir olsun ve  $\varphi \neq 0$  olsun. Boyut teoremini kullanarak,

$$\dim(V) = \dim(\ker \varphi) + \dim(\text{Im } \varphi) = \dim(\text{im } \varphi)$$

elde ederiz.  $\text{im } \varphi$ ,  $W$ 'nin bir altuzayı olduğundan ve bu altuzayın boyutu  $V$ 'nin boyutuna eşit olduğundan  $\phi(V) = W$  elde ederiz. Bu da örtenliği verir.

$\varphi$  örten olsun. O halde  $\varphi(V) = W$  olacağından  $\dim(\ker \varphi) = 0$  bulunur. Bu da  $\ker \varphi = \{0\}$  demektir. Dolayısıyla  $\varphi$  birebirdir. Hem birebir hem de örten bir homomorfizma, bir izomorfizmadır. O halde  $\varphi$  bir izomorfizmadır.

$\varphi$  bir izomorfizma olsun. O halde  $\varphi$ 'nin birebir bir fonksiyon olduğu oldukça açıktır.  $\square$

**Sonuç 3.2.4.**  $T : V \rightarrow V$  bir doğrusal dönüşüm olsun.  $T$  birebirdir ancak ve ancak  $T$  örtense.

**Önsav 3.2.1.**  $F$  bir cisim olsun.  $m, n$  pozitif doğal sayılar olsun ve her  $1 \leq i \leq m$  ve her  $1 \leq j \leq n$  için  $a_{i,j} \in F$  olsun.

$$\begin{aligned} 0 &= a_{1,1}x_1 + \dots + a_{1,n}x_n \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \\ 0 &= a_{m,1}x_1 + \dots + a_{m,n}x_n \end{aligned}$$

denklem sisteminde  $n > m$  ise sistemin sıfırdan farklı en az bir çözümü vardır.

Çok alakasız duruyor değil mi? Bakın konuyu nasıl bağlıyorum.

**Kanıt:**  $T : F^n \rightarrow F^m$  fonksiyonunu,  $T(x_1, \dots, x_n) = (y_1, \dots, y_m)$  olarak tanımlayalım öyle ki her  $1 \leq i \leq m$  için

$$y_i = \sum_{j=1}^n a_{i,j}x_j$$

olarak tanımlayalım. Bu dönüşümün doğrusal olduğunu  $\mathbb{R}$  için uzun uzun açıklamıştık. Aynı şey herhangi bir  $F$  cismi için de geçerli. Boyut teoreminden ötürü  $n = \dim(\ker T) + \dim(T(F^n)) \leq \dim(\ker T) + m$  yazılır. Bu da  $0 < n - m \leq \dim(\ker T)$ . Dolayısıyla  $T$  birebir olamaz. Demek ki sistemin sıfırdan farklı en az bir çözümü olmalı.  $\square$

Gördüğünüz gibi çok uğraşmadık. Daha önce kanıtladığımız bir teoremi kullanarak uzun gözüken bir kanıt yaptık. Doğrusal cebir derslerinde bazen doğrusal denklem sistemi çözüm yöntemleri yer alabiliyor. Bu bir tesadüf değil, birçok yöntem vektör uzayları ve doğrusal dönüşümlerin özelliklerine dayanıyor.

### Egzersizler

**Egzersiz 3.2.1** (İkinci İzomorfizma Teoremi).  $T : V + U \rightarrow V/(U \cap V)$  fonksiyonunu  $T(v) = v + (U \cap V)$  olarak tanımlayın. Bu dönüşümün çekirdeğini bulun ve örten olduğunu gösterin. Birinci izomorfizma teoremini kullanarak  $V/(U \cap V) \cong (V+U)/\ker T$  izomorfizmasını gözlemleyin.

**Egzersiz 3.2.2** (Üçüncü İzomorfizma Teoremi).  $T : V/U \rightarrow V/W$  fonksiyonunu  $T(v + U) = v + W$  olarak tanımlayın. Bu dönüşümün çekirdeğini bulun ve örten olduğunu gösterin. Birinci izomorfizma teoremini kullanarak  $V/W \cong (V/U)/\ker T$  izomorfizmasını gözlemleyin.

**Egzersiz 3.2.3.**  $T : V \rightarrow W$  olsun.  $X \subseteq V$  kümesinin doğrusal bağımlı olması için gerek ve yeter şartın  $f(X) \subseteq W$  kümesinin doğrusal bağımlı olması olduğunu kanıtlayın.

**Egzersiz 3.2.4.**  $2x + y - z = 0$  ve  $5x - 3y + 2z = 0$  denklem sisteminin  $z = x = y = 0$ 'dan farklı bir çözümü olduğunu gösterin.

### 3.3 Matrisler

Sonlu tabanlı bir  $V$  uzayı için bir  $T : V \rightarrow W$  doğrusal dönüşümü alalım. Önsav 3.1.2'den ötürü  $V$ 'nin her tabanının  $T$  altındaki görüntüsünün  $T(V)$  uzayını ürettiğini biliyoruz.

**Not:** Kimi kaynaklarda  $T(V)$  yerine  $\text{im } T$  yazabilmektedir. Bundan böyle biz de kolaylık açısından bu gösterimi kullanacağız.

O halde eğer  $\{e_1, \dots, e_n\}$  kümesi  $V$ 'nin bir tabanı ise  $\{f(e_1), \dots, f(e_n)\}$  kümesi  $\text{im } T$  uzayını üretir. Bundan dolayı herhangi bir  $w \in \text{im } T$  vektörünü  $e_1, \dots, e_n$  cinsinden yazabiliriz. Hatta, daha iyisini yapabiliriz.  $\{f_1, \dots, f_m\} \subseteq \text{im } T$ , görüntü kümesinin bir tabanı olsun. Her  $1 \leq k \leq n$  ve  $1 \leq i \leq m$  için öyle  $a_{ij}$  skalerleri vardır ki

$$T(e_k) = \sum_{i=1}^m a_{ik} f_i$$

yazılabilir. Daha açık yazmak gerekirse,

$$T(e_1) = a_{11}f_1 + \dots + a_{m1}f_m$$

$$T(e_2) = a_{12}f_1 + \dots + a_{m2}f_m$$

.

.

.

$$T(e_n) = a_{1n}f_1 + \dots + a_{mn}f_m$$

gibi bir sistemden söz edebiliyoruz. Buradaki  $a_{ij}$  katsayılarını tablolaştıralım:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Bu tablodaki  $i$ 'nci sütun,  $T(e_i)$  kümesinin her bir elemanının  $f_1, \dots, f_m$  tabanının doğrusal kombinasyonu yazıldığında katsayıların sıralanmasından geliyor. Dolayısıyla tablonun  $n$  adet sütunu ve  $m$  adet satırı bulunur. Bu tabloya bir  $m \times n$  tipinde bir **matris** denir. Matrisi yazarken sıra önemli olduğu için bazen taban yerine **sıralı taban** dendiğine şahit olabilirsiniz. Eğer  $v \in V$  ise bazı  $c_1, \dots, c_n$  skalerleri için,

$$T(v) = T\left(\sum_{k=1}^n c_k e_k\right) = \sum_{k=1}^n c_k T(e_k) = \sum_{k=1}^n c_k \sum_{i=1}^m a_{ik} f_i = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^m (c_k a_{ik}) f_i \quad (*)$$

yazılabilir. Buradaki  $v$  vektörü,  $c_1, \dots, c_n$  katsayıları ve  $e_1, \dots, e_n$  tabanı tarafından tek türlü yazıldığından bu vektörü

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ c_n \end{bmatrix}$$

matrisi biçiminde eşsiz bir şekilde ifade edebiliriz. Şimdi

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 a_{11} + c_2 a_{12} + \dots + c_n a_{1n} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ c_1 a_{m1} + c_2 a_{m2} + \dots + c_n a_{mn} \end{bmatrix}$$

tanımını yapalım. Sağdaki matrisin  $m \times 1$  tipinde, her  $i$ 'inci satırının  $T(v) = b_1 f_1 + \dots + b_m f_m$  yazımındaki  $b_i$  katsayısına eşit olduğuna dikkat edin. Bunu (\*) ile işaretlediğimiz eşitlikten hemen çıkardık. Birazdan bu çarpma işleminin dağılma ve birleşme özellikleri olduğunu göstereceğiz. Ondan önce birkaç gözlem yapalım, mesela  $S : W \rightarrow U$  bir doğrusal dönüşüm olsun.  $U$ 'nun bir  $g_1, \dots, g_r$  tabanını seçelim ve  $T(f_1), \dots, T(f_m)$  elemanlarının katsayı matrisini yazalım. Bu matrisi demin yaptığımız gibi

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2m} \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ b_{r1} & b_{r2} & \dots & b_{rm} \end{bmatrix}$$

gibi bir matristen söz edebiliriz. Soru şu:  $S \circ T$  bileşkesinin matrisini  $a_{ij}, b_{ij}$  katsayıları cinsinden ifade edebilir miyiz? Bunu denememiz lazım. Bunun için  $S \circ T(e_1), \dots, S \circ T(e_n)$

elemanlarının  $g_1, \dots, g_r$  tabanına göre katsayılarını belirlememiz gerekiyor. Hesaplayalım:

$$\begin{aligned}
 S \circ T(e_k) &= S(T(e_k)) \\
 &= S\left(\sum_{i=1}^m a_{ik} f_i\right) \\
 &= \sum_{i=1}^m a_{ik} S(f_i) \\
 &= \sum_{i=1}^m a_{ik} \sum_{j=1}^r b_{ji} g_j \\
 &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^r (a_{ik} b_{ji}) g_j \\
 &= \sum_{j=1}^r \sum_{i=1}^m (b_{ji} a_{ik}) g_j
 \end{aligned}$$

Demek ki yeni matrisin  $k$ 'inci sütununu yazmak için  $i$ 'inci satırına  $\sum_{i=1}^m (b_{ji} a_{ik})$  sayısının yazılması gerekiyormuş. Böylece bileşke fonksiyonun matrisi

$$\begin{bmatrix}
 \sum_{i=1}^m b_{1i} a_{i1} & \sum_{i=1}^m b_{1i} a_{i2} & \dots & \sum_{i=1}^m b_{1i} a_{in} \\
 \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 \sum_{i=1}^m b_{ri} a_{i1} & \sum_{i=1}^m b_{ri} a_{i2} & \dots & \sum_{i=1}^m b_{ri} a_{in}
 \end{bmatrix}$$

şeklinde olmalıymış. Bu matrisi tamamen daha önce tanımladığımız  $A$  ve  $B$  matrislerinin katsayılarından oluşturduk. Bu matrisi  $B \cdot A$  ile gösteririz ve  $B$  ile  $A$  matrisinin çarpımı olduğunu söyleriz.

$$\begin{bmatrix}
 a_{11} & a_{12} & a_{13} \\
 a_{21} & a_{22} & a_{23}
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 b_{11} & b_{12} \\
 b_{21} & b_{22} \\
 b_{31} & b_{32}
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 c_{11} & c_{12} \\
 c_{21} & c_{22}
 \end{bmatrix}$$

Şekil 11: Matris Çarpması Örneği ( $c_{11} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31}$ )

Eğer herhangi bir mühendislik dalında lineer cebir görüyor olsaydınız nereden geldiğini bilmeden bu çarpmayı kullanıyor olurdunuz. Evet, yabancı için çok yapay bir çarpma gibi duruyor fakat bu çarpma formülü görmüş olduğunuz üzere doğrusal dönüşümlerin bileşkelerinin matris gösterimlerinin doğal bir sonucu olarak geliyor. O zaman daha kolay tahmin edebileceğiniz bir şey soralım.  $S, T : V \rightarrow W$  iki doğrusal dönüşüm olsun.  $S + T$

fonksiyonunun matrisi hakkında ne söyleyebilirsiniz? Aklınıza gelen ilk cevap doğru. Şimdi bunun da kanıtını yapalım.  $T(e_k) = c_1f_1 + \dots + c_mf_m$  ve  $S(e_k) = d_1f_1 + \dots + d_mf_m$  olsun. Kolayca görüleceği üzere;

$$\begin{aligned}(S + T)(e_k) &= S(e_k) + T(e_k) = (c_1f_1 + \dots + c_mf_m) + (d_1f_1 + \dots + d_mf_m) \\ &= (c_1 + d_1)f_1 + \dots + (c_mf_m)f_m\end{aligned}$$

yazabildiğimizden matrislerde de her bir satır ve sütunu ayrı ayrı toplayarak yazmamız yeterli:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{21} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix}.$$

$A$  ve  $B$  matrisini toplayabilmeniz için ikisinin de  $m \times n$  tipinde olması gerekiyor. Halbuki çarpma yaparken çarpmanın sağ bileşeninin  $m \times n$  tipinde ise sol bileşeninin  $r \times m$  tipinde olması gerekiyordu. Hem bileşke hem de toplama işlemini yapabilmemiz için hem  $m = n$  ve  $r = m$  sağlanması gerekiyor. Yani yalnızca  $n \times n$  tipindeki matrislerle iki işlemi birden yapmak anlamlı olur. Matris çarpmasının değişmeli olmadığına dikkat edin, zira fonksiyon bileşkesi de değişmeli değildir.

**Tanım.**  $V$  sonlu boyutlu bir vektör uzayı olmak üzere birer  $e, f$  sıralı tabanları alalım. Bir  $T \in \text{End}(V)$  doğrusal dönüşümünün bu tabanlara göre matrisini  $\mathcal{M}_{e,f}(T)$  olarak göstereceğiz. Ayrıca  $\mathcal{M}_{n \times m}(F)$  ise girdileri  $F$  cisiminden olan  $n \times m$  tipindeki tüm matrislerin kümesi olsun. Eğer  $n = m$  ise  $\mathcal{M}_n(F)$  yazacağız.

Buraya yaptıklarımızdan şu sonuca varabiliriz ki  $\varphi : \mathcal{M}_n(F) \rightarrow \text{End}(V)$  fonksiyonunu birebir ve örten şekilde yazabiliriz öyle ki  $\varphi(AB) = \varphi(A) \circ \varphi(B)$  ve  $\varphi(A + B) = \varphi(A) + \varphi(B)$  olur. Böylece  $\mathcal{M}_n(F)$  ile  $\text{End}(V)$  arasında bir halka izomorfizması bulunur. Bu kitapta henüz "halka" tanımını yapmadık çünkü ihtiyacımız olmadı. Şöyle düşünün, cisimlerdeki "sıfırdan farklı her elemanın çarpmaya göre tersi olma" koşulu ile "çarpmaya göre değişme" özelliğini çıkarırsak halka tanımını elde ederiz.

**Tanım.**  $R$  boştan farklı bir küme olmak üzere  $(R, +, \times)$  şu özellikleri sağlasın ( $x \times y$  yerine  $xy$  yazacağız):

- $R$  toplamaya göre bir grup,
- Her  $a, b, c \in R$  için  $a(bc) = (ab)c$ ,
- Öyle bir  $1 \in R$  vardır ki her  $a \in R$  için  $a1 = 1a = a$ ,
- Her  $a, b, c$  için  $a(b + c) = ab + ac$  ve  $(b + c)a = ba + ca$ .

O halde  $(R, +, \times)$  üçlüsüne bir halka denir.

Önsav 3.1.4'ten ötürü  $\text{End}(V)$  bir halkadır. Bunu matrisler için de söyleyebiliriz.

**Sonuç 3.3.1.** Her  $r \in F$  için;

$$r \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ra_{11} & ra_{12} & \dots & ra_{1n} \\ ra_{21} & ra_{22} & \dots & ra_{2n} \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ ra_{m1} & ra_{m2} & \dots & ra_{mn} \end{bmatrix}$$

tanımını yapalım. Bu skalerle çarpma işlemi ile birlikte  $\mathcal{M}_n(F)$  bir vektör uzayıdır. Ayrıca matris çarpması ve toplamasına göre  $\mathcal{M}_n(F)$  kümesi bir halkadır.

Böylece anlamış olduk ki matrisler, çarpmaya göre birleşme özelliğine, çarpmayla ve toplamayla dağılma özelliğine sahiptir. Çünkü onun muadili olan endomorfizmalar da bu özelliklere sahiptir.

Şimdi bazı özel matris türlerini tanıyacağız.  $Id_V : V \rightarrow V$  birim dönüşümünü ele alalım.  $V$  uzayının bir  $e_1, \dots, e_n$  tabanını yine kendisi ile ifade eden matrisi yazabiliriz. Her  $0 \leq i \leq n$  için  $Id(e_i) = e_i$  olacağından dönüşümün matrisi de

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & & & & \\ \cdot & & & & \\ \cdot & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

şeklinde gözükür. Bu matrise birim matris adı verilir ve  $I$  ile gösterilir. Tahmin edileceği üzere uygun bir  $A$  matrisi için  $AI = IA = A$  sağlanır. Bunu, fonksiyonlardaki  $f \circ Id = Id \circ f = f$  eşitliğinden rahatlıkla elde ederiz. Dikkat edeceğimiz üzere birim matrisler her zaman  $n \times n$  tipindedir. Bu tür matrislere **kare matris** denir. Eğer bir  $B$  matrisi için  $AB = BA = I$  sağlanıyorsa  $B$  matrisine  $A$ 'nın tersi denir ve  $B = A^{-1}$  olarak gösterilir. Ters matrisler, birebir ve örten dönüşümlerin terslerini ifade edebilirler. Bu açıdan önem arz ederler. Buna benzer olarak sıfır matrislerini ele alabiliriz. Birim matris, çarpmaya göre birim eleman iken sıfır matris toplamaya göre birim elemandır.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

Bu matris, her girdisi sıfır olan matristir. Bu matrisi  $0_{n \times m}$  olarak göstereceğiz. Girdileri  $a_{ij}$  olan bir kare matriste eğer her  $i \neq j$  için  $a_{ij} = 0$  sağlanıyorsa o matrise **köşegen matris** ya da **diyagonal matris** denir.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

**Tanım.**  $A \in \mathcal{M}_n(\mathcal{F})$  olsun. Eğer bir  $n \geq 2$  tamsayısı için  $A^n = 0_{n \times n}$  oluyorsa  $A$ 'ya **sıfır kuvvetli (nilpotent) matris** denir.

Tahmin edebileceğiniz üzere eğer  $\mathcal{M}(T)$  matrisi sıfır kuvvetli ise her  $x$  vektörü için  $T^n(x) = 0$  olur. Klasik bir örnek olarak şunu verelim:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

olduğundan bu matris sıfırkuvvetlidir.

**Tanım.** Bir  $A \in \mathcal{M}_n(\mathcal{F})$  matrisi için  $AB = BA = I$  özelliğini sağlayan bir  $B \in \mathcal{M}_n(\mathcal{F})$  matrisi varsa  $A$ 'ya **tersinir, birimsel** ya da **düzenli** matris denir.

**Önsav 3.3.1.** Bir matris hem sıfır kuvvetli, hem de tersinir olamaz.

**Kanıt:**  $A \neq 0_{n \times n}$  matrisinin hem sıfır kuvvetli hem de tersinir olduğunu varsayalım.  $A$  tersinir olduğu için  $AB = BA = I$  özelliğini sağlayan bir  $B$  matrisi vardır. Ayrıca bir  $n \geq 2$  için  $A^n = 0_{n \times n}$  olsun öyle ki  $A^{n-1} \neq 0_{n \times n}$ . Bu durumda

$$0_{n \times n} = 0_{n \times n} B = A^n B = A^{n-1} (AB) = A^{n-1} \neq 0$$

çelişisini elde ederiz. □

**Önsav 3.3.2.**  $A \in \mathcal{M}_n(\mathcal{F})$  matrisi sıfır kuvvetli olsun. O halde  $I - A$  matrisi tersinirdir.

**Kanıt:**  $A$  sıfır kuvvetli olduğundan bir  $n$  doğal sayısı için  $A^n = 0_{n \times n}$  olur. O halde;

$$I = I^n = I^n - 0_{0 \times 0} = I^n - A^n = (I - A)(I + A + A^2 + \dots + A^{n-1})$$

eşitliğinden istediğimizi elde ederiz. □

**Sonuç 3.3.2.**  $A$  sıfır kuvvetli ise  $A - I$  matrisi tersinirdir.

**Kanıt:**  $I - A$  matrisinin tersinir olduğunu biliyoruz. Bir  $B$  matrisi için:

$$(I - A)B = I.$$

olur. Ufak bir manipülasyonla

$$(A - I)(-B) = I$$

elde ederiz.

**Önsav 3.3.3.** (*Çoraplar ve Ayakkabıları Özelliği*)  $A$  ve  $B$  tersinir matrisler olsun.  $O$  halde  $(AB)$  matrisi de tersinirdir. Bu matrisin tersi  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$  şeklinde bulunur.

**Kanıt:**  $A$  matrisine karşılık gelen birebir ve örten bir  $T : F^n \rightarrow F^n$  her zaman yazabiliriz. Bunun için  $T(v) = Av$  tanımı yapmamız yeterli. Aynı şekilde  $B$  matrisi için de birebir ve örten bir  $S$  dönüşümü yazabiliriz.  $O$  halde  $T \circ S$  dönüşümü de birebir ve örtendir.  $O$  halde  $AB$  de tersinirdir.

Şimdi ikinci cümleyi kanıtlayalım. Bu özellik, çoraplar ve ayakkabıları özelliği olarak geçer. Şöyle düşünün; dışarı çıkarken önce çoraplarınızı sonra da ayakkabılarınızı giyersiniri, öyle değil mi? Eve geri geldiğinizde ise önce ayakkabılarınızı sonra da çoraplarınızı çıkarmanız gerekir. Giyme ve çıkarma gibi ters işlemler yaparken işlemin elemanları ters sırada olacak şekilde yapılır. Burda da o şekilde bir şey düşünebilirsiniz:  $AB$  matrisinin tersi  $A^{-1}B^{-1}$  olmaz,  $B^{-1}A^{-1}$  olur. Kanıt bu değil tabii ki, hemen onu da yapalım:

$$\begin{aligned} I &= (AB)^{-1}(AB) \\ IB^{-1} &= (AB)^{-1}A \\ IB^{-1}A^{-1} &= B^{-1}A^{-1} = (AB)^{-1} \end{aligned}$$

işlemini yapmak yeterli olacaktır. Yani sırasıyla  $B$ 'yi ve  $A$ 'yı karşıya attık ve kanıtı tamamladık.  $\square$

Aynı şey fonksiyon tersi için de geçerli  $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$ . Bir ikili işleme göre ters alındığı zaman geçerli olan genel bir kuraldır bu.  $\square$

## Egzersizler

### Egzersiz 3.3.1.

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

matrisinin sıfırkuvvetli olduğunu gösterin.

### Egzersiz 3.3.2. $ad - bc \neq 0$ olmak üzere bir

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

matrisi alalım. Bu matrisin tersini bulun.

**Egzersiz 3.3.3.**  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  doğrusal dönüşümünü  $T(x, y, z) = (2x + 2y, z)$  kuralı ile verelim. Kanonik tabanlara göre bu dönüşüme karşılık gelen matrisi bulun. Bu matrisin tersinir olduğunu gösterin.

**Egzersiz 3.3.4.**  $T : V \rightarrow V$  bir doğrusal dönüşüm olsun. Herhangi bir taban seçilmiş olsun.  $\mathcal{M}(T)$  matrisinin tersinir olması için gerek ve yeter koşulun  $T$ 'nin birebir olması olduğunu kanıtlayınız.

**Egzersiz 3.3.5.**  $\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  matrisinin tersinir olduğunu gösterin.

**Egzersiz 3.3.6.** Sıfırdan farklı bir  $A$  matrisi için  $AB = 0_{n \times n}$  eşitliğini sağlayan sıfırdan farklı bir  $B$  matrisi varsa  $A$  matrisine **sıfır bölen** denir. Bir matrisin hem tersinir hem de sıfır bölen olamayacağını gösterin.

**Egzersiz 3.3.7.** Önsav 3.3.2'nin tersinin doğru olup olmadığını araştırın. Başka bir deyişle bir  $A$  matrisi için  $I - A$  matrisi tersinir olsun. Bu durumda  $A$  sıfır kuvvetli olur mu?

**Egzersiz 3.3.8.**  $A$  sıfır kuvvetli bir matris ise  $-A$ 'nın da sıfır kuvvetli olduğunu gösterin.

**Egzersiz 3.3.9.**  $A$  sıfır kuvvetli bir matris ise  $I + A$  matrisinin tersinir olduğunu gösterin.

**Egzersiz 3.3.10.**  $\mathcal{M}_{n \times m}(\mathcal{F})$  kümesinin  $\mathcal{F}$  cismi üzerinde  $mn$  boyutlu bir vektör uzayı olduğunu doğrulayınız.

**Egzersiz 3.3.11.**  $GL_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) : ad - bc \neq 0 \right\}$  kümesinin matris çarpması altında bir grup olduğunu gösterin. Bu gruba **genel lineer grup** adı verilir.

**Egzersiz 3.3.12.** Reel sayılar üzerinde öyle iki  $A, B$  kare matrisi bulun ki  $AB \neq BA$  olsun.

**Egzersiz 3.3.13.** Boyutları eşit olan  $V, W$  vektör uzayları için bir  $T : V \rightarrow W$  doğrusal dönüşümü alalım. Birer  $e_1, \dots, e_n \in V$  ve  $f_1, \dots, f_n \in W$  tabanı alalım. Her  $1 \leq i \leq n$  için  $T(e_i) = a_i f_i$  olsun. O halde  $\mathcal{M}(T)$  matrisine **köşegen matris** denir. Bu matrisin neye benzediğini açıklayın.  $A$  ve  $B$  köşegen matrisler olsun. Matrislerin sırasıyla  $i$ 'inci satır  $j$ 'inci girdilerine  $a_{ij}$  ve  $b_{ij}$  ismini verelim.  $C = AB$  için  $c_{ij} = a_{ij}b_{ij}$  olduğunu gösterin. ( $c_{ij}$  elemanı  $C$  matrisinin  $i$ 'inci satır ve  $j$ 'inci sütun girdisidir.)

**Egzersiz 3.3.14.**  $v$  bir vektör ve  $A$  bir matris olsun.  $A(v + w) = Av + Aw$  özelliğinin doğru olduğunu gösteriniz. Bir  $\lambda$  skaleri için  $A(\lambda v) = \lambda(Av)$  olduğunu doğrulayınız. Doğruladıktan sonra her matrisin bir  $T(v) = Av$  dönüşümüne karşılık geldiğini gösteriniz.

### 3.4 Dual Uzay

Bir  $V$  vektör uzayı alalım. Her seferinde açıkça belirtmesek de bu uzayın bir  $\mathcal{F}$  cismi üzerinde tanımlandığını biliyoruz. Hatta  $\mathcal{F}$  cisminin kendisi üzerine vektör uzayı olduğunu da biliyoruz. Neden bir  $f : V \rightarrow \mathcal{F}$  doğrusal dönüşümü yazılamasın ki? Bu tür bir dönüşüm özel bir doğrusal dönüşümdür ve **doğrusal form** adını alır.  $\text{Hom}(V, \mathcal{F})$  uzayına  $V$ 'nin **dual uzayı** adı verilir ve kısaca  $V^*$  ile gösterilir. Daha da önce de konuştuğumuz gibi  $V^*$  kümesi aslında  $\text{Func}(V, \mathcal{F})$  uzayının bir altuzayıdır.

- $\pi_i(a_1, a_2, \dots, a_n) = a_i$  kuralı ile tanımlanmış  $\pi_i : \mathcal{F}^n \rightarrow \mathcal{F}$  fonksiyonu bir doğrusal formdur. Bu tür bir fonksiyona **izdüşüm fonksiyonu** da denilebilir.
- Bir  $c_1, \dots, c_n \in \mathcal{F}$  için  $\varphi(a_1, \dots, a_n) = \sum_{i=1}^n c_i a_i$  kuralı ile verilen  $\varphi : \mathcal{F}^n \rightarrow \mathcal{F}$  fonksiyonu da bir doğrusal formdur.
- Sabit sıfır fonksiyonu, bir doğrusal formdur.
- Eğer  $V \neq \mathcal{F}$  ise birim fonksiyonun doğrusal form olma imkanı yoktur.
- $V$ 'nin bir  $v_1, \dots, v_n$  tabanını alalım.  $v = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n$  yazılsın. Bu tipte bir yazılım tek türlü olduğundan  $e_i(v) = a_i$  fonksiyonunu iyi tanımlayabiliriz. Bu fonksiyon bir doğrusal formdur.

Son tipteki doğrusal formlara yakından bakalım. Bu şekilde  $e_1(v), e_2(v), \dots, e_n(v)$  gibi  $n$  farklı fonksiyon yazabiliriz. Bu,  $V^*$  uzayının bir tabanını oluşturur. Böylece  $\dim(V) = \dim(V^*)$  sonucuna varabiliriz. Bunun için herhangi bir  $f \in V^*$  alalım. Her  $v \in V$  için

$$f(v) = f\left(\sum_{i=1}^n a_i v_i\right) = \sum_{i=1}^n f(a_i v_i) = \sum_{i=1}^n a_i f(v_i) = \sum_{i=1}^n e_i(v) f(v_i)$$

yazabiliriz. Burada her  $i$  için  $f(v_i) \in \mathcal{F}$  olduğunu unutmayın.  $v \in V$  keyfi olduğundan  $f(v)$  fonksiyonu,  $e_i(v)$  fonksiyonlarının ve  $f(v_i)$  katsayılarının doğrusal kombinasyonu olarak yazılmış oldu. Böylece  $f \in \langle e_1(v), \dots, e_n(v) \rangle$  oldu. O halde  $V^* = \langle e_1(v), \dots, e_n(v) \rangle$  olduğunu kanıtlamış olduk.

Dual uzaydaki herhangi bir dönüşümün matrisi  $n \times 1$  şeklinde olur. Demek ki  $V^* \cong \mathcal{M}_{n \times 1}(\mathcal{F})$ . Bu durumda Egzersiz 3.3.10'da yaptıklarımızdan ötürü

$$\dim(V^*) = n \cdot 1 = n$$

olmalıymış. O halde  $\{e_1(v), \dots, e_n(v)\}$  kümesi minimal bir üreteç kümesi olmalıymış. Buradan  $e_1(v), \dots, e_n(v)$  vektörlerinin doğrusal bağımsız olduğu çıkar. O halde  $e_1(v), \dots, e_n(v)$  vektörleri  $V^*$  uzayının bir tabanıymış. Bunu dolaylı yoldan hesaplamak da mümkündür. Nitekim her  $v \in V$  için

$$c_1 e_1(v) + \dots + c_n e_n(v) = 0$$

ise birazcık manipülasyon kullanarak

$$(c_1 e_1 + \dots + c_n e_n)(v) = 0$$

yazabiliriz. Gerekirse  $v$ 'yi üreteç kümesinden alarak  $v = v_i$  varsayımını yapabiliriz. Buradan her  $i$  için

$$0 = (c_1 e_1 + \dots + c_n e_n)(v_i) = c_i$$

gelir. Bu da her  $i$  için  $c_i = 0$  demektir. Bu bulduğumuz tabana **dual taban** adı verilir.

**Tanım.**  $f \in \text{Hom}(V, W)$  olsun.  $f^t : W^* \rightarrow V^*$  dönüşümü,

$$f^t(\varphi) = \varphi \circ f$$

olarak verilsin. Bu dönüşüme  $f$ 'nin **dual dönüşümü** denir.

$f^t \in \text{Hom}(W^*, V^*)$  olduğunu gösterelim.  $T, S \in \text{Hom}(V, W)$  olsun. O halde

$$f^t(T + S) = (T + S) \circ f = T \circ f + S \circ f = f^t(T) + f^t(S)$$

yazabiliriz. Şimdi bir  $a$  skaleri için

$$f^t(aT) = (aT) \circ f = a(T \circ f) = a f^t(T)$$

olduğunu görelim. Demek ki  $f^t$  gerçekten de bir doğrusal dönüşüm olur.

**Önsav 3.4.1.**  $S, T \in \text{Hom}(V, W)$  ve  $a \in \mathcal{F}$  olsun. O halde aşağıdaki özellikler sağlanır:

i.  $(S + T)^t = S^t + T^t,$

ii.  $(aT)^t = aT^t,$

iii.  $(S \circ T)^t = T^t \circ S^t.$

**Kanıt:** Herhangi bir  $\varphi \in \text{Hom}(V, W)$  alalım. Rutin bir hesaplama;

$$\varphi \circ (S + T) = \varphi(S + T) = \varphi(S) + \varphi(T) = S^t(\varphi) + T^t(\varphi)$$

elde ederiz ve bu da (i) önermesini kanıtlar. (ii) önermesi de aynı şekilde hesaplanabilir, kanıt okura bırakılmıştır. (iii)'yi kanıtlayalım. Bu da,

$$(S \circ T)^t(\varphi) = \varphi \circ (S \circ T) = (\varphi \circ S) \circ T = T^t \circ (\varphi \circ S) = (T^t \circ S^t)(\varphi)$$

eşitliğinden kolayca çıkar. □

En nihayetinde dual dönüşümler de bir doğrusal dönüşüm. O halde bir tabana göre matrisini yazabiliriz. Bunu yapmayı deneyelim.  $A = \mathcal{M}(T)$  ve  $B = \mathcal{M}(T^t)$  olsun.  $A$  ile  $B$  matrisleri arasında bir ilişki kurmayı deneyeceğiz.  $V^*$  uzayının bir  $e_1, \dots, e_n$  tabanını,  $W^*$  uzayının bir  $f_1, \dots, f_m$  tabanını,  $W$  uzayının bir  $w_1, \dots, w_m$  tabanını ve  $V$  uzayının bir  $v_1, \dots, v_n$  tabanını ele alalım.  $b_{ij}$  skaleri, tahmin edilebileceği üzere  $B$  matrisinin  $i$ 'inci satır ve  $j$ 'inci sütununa denk gelen girdisi olsun. Aynı şeyi  $a_{ij}$  skaleri ve  $A$  matrisi için de söyleyelim. Tanım olarak

$$T^t(f_i) = \sum_{k=1}^n b_{ki} e_k$$

yazabiliyoruz. Bu eşiliğin sol tarafını açalım, her  $1 \leq j \leq n$  için:

$$T^t(f_i(v_j)) = f_i \circ T(v_j) = \sum_{r=1}^m b_{ri} e_r(v_j) = b_{ji}.$$

Buradaki  $e_r(v_j)$  ifadesi ancak ve ancak  $r = j$  ise 1 olarak çıkar, yoksa 0 olarak çıkar. Bunu kullanarak bu toplamda hayatta kalacak tek ifadenin  $c_{ji}$  olması gerektiğini buluruz. Bir sonraki adımda ise

$$f_i \circ T(v_j) = f_i(T(v_j)) = f_i\left(\sum_{r=1}^m a_{rj} w_r\right) = \sum_{r=1}^m a_{rj} f_i(w_r) = a_{ij}$$

olduğunu görürüz. O halde bu iki eşitlikten  $a_{ij} = b_{ji}$  çıkar. Öncelikle  $\mathcal{M}(T)$   $n \times m$  tipinde ise  $\mathcal{M}(T^t)$  matrisi de  $m \times n$  tipindedir. Ayrıca bu matrislerden birindeki  $a_{ij}$  girdisi ile diğerinin  $b_{ji}$  girdisi eşittir.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}(T) & & \mathcal{M}(T^t) \\ \left[ \begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{array} \right] & & \left[ \begin{array}{cc} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{array} \right] \end{array}$$

Şekil 12: Örnek birer  $\mathcal{M}(T)$ ,  $\mathcal{M}(T^t)$  matrisi

Buradaki  $\mathcal{M}(T^t)$  matrisine,  $\mathcal{M}(T)$  matrisinin **devriği** (ya da **transpoz**) adı verilir. Bir  $A$  matrisinin devriğini  $A^t$  veya  $A^T$  olarak gösterebiliriz. Önsav 3.4.1'den ötürü direkt olarak  $(A+B)^T = A^T + B^T$ ,  $(rA)^T = rA^T$  ve  $(AB)^T = B^T A^T$  özelliklerini yazabiliyoruz. Bu özellikleri eğer doğrusal dönüşümleri kullanmadan matris üzerinden yapsaydık epey bir zorlanırdık. Zira matrisler gibi büyük tabloları kullanarak işlem yapmak hem yer hem de vakit kaybı. Onun yerine doğrusal dönüşümlerdeki taban ve tabanların indisleriyle yaptığımız hesaplar bize daha hızlı cevaplar veriyor. Bu saatten sonra kim matrisler gibi büyük sayı girdileri olan sistemlerle işlem yapmak istesin ki? Umarız doğrusal dönüşümlerle matrisler arasındaki ilişkilerin önemi böylece daha açık olmuştur. Size bir soru: Bir tersinir  $A$  matrisi için  $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$  özelliğini kanıtlayabilir miyiz? Bir matrisi tablo şeklinde yazarak tersini bulup sonra da devriğini bulmak oldukça zor bir işlemdir. Fakat biz doğrusal dönüşümler yardımıyla  $(AB)^T = B^T A^T$  eşitliğini zaten göstermiştik. Bu eşitlikte  $B = A^{-1}$  alarak

$$I = I^T = (AA^{-1})^T = (A^{-1})^T A^T$$

olduğunu gösterebiliriz. Eşitliğin sağ ve sol tarafını  $(A^T)^{-1}$  ile çarptığımızda istediğimiz şeyi elde ederiz. Burada birim matrisin devriğinin kendisine eşit olduğunu kullandığımızı görmekteyiz. Bu, bütün köşegen matrisler için geçerlidir. Bu tür matrislere **simetrik matris** adı verilir. Yani  $A = A^T$  sağlanıyorsa  $A$  bir simetrik matristir.

**Tanım.** Bir matrisin bir sütununu sabitleyip vektörleştirelim:  $v_i := (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}) \in \mathcal{F}^n$ .  $\dim\langle v_1, \dots, v_m \rangle$  sayısına matrisin **rankı** adı verilir. Bir  $A$  matrisinin rankı  $\text{rank } A$  ile gösterilir.

Bu tanımdaki  $v_i$  vektörleri sütun vektörü adını alır. Benzer şekilde satır vektörlerini de tanımlayabiliriz. Bunun için  $u_j := (a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{mj})$  tanımını yapalım, bu  $u_j$  vektörüne satır vektörü denir. Bu sefer sabit bir satır alıp girdileri vektör haline getirerek  $u_j$  vektörünü tanımladık.

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{Sütun vektörü} \\ \text{Satır vektörü} \end{array}$$

Şekil 13: Birer Adet Satır Sütun Vektörü

**Önsav 3.4.2.** Bir  $A$  matrisinin satır vektörleri  $u_1, \dots, u_m$  ve sütun vektörleri  $v_1, \dots, v_n$  olarak verilsin. O halde

$$\dim(\langle u_1, \dots, u_m \rangle) = \dim(\langle v_1, \dots, v_n \rangle) = \text{rank } A$$

eşitliği sağlanır.

**Kanıt:**  $\dim(\langle v_1, \dots, v_n \rangle) = \text{rank } A$  eşitliği zaten tanımdan geliyor. Şimdi  $T : \mathcal{F}^n \rightarrow \mathcal{F}^m$  dönüşümünü  $T(v) = Av$  olarak tanımlayarak:

$$\begin{aligned} \dim(\langle u_1, \dots, u_m \rangle) &= \text{rank } A^T \\ &= \dim(\text{im } T^t) \\ &= \dim(\text{im } T) \\ &= \text{rank } A \\ &= \dim(\langle v_1, \dots, v_n \rangle) \end{aligned}$$

elde ederiz. Bu da önermeyi kanıtlar.  $\square$

Bu önermeyi kanıtlarken dual uzayın boyutunun uzayın boyutuna eşit olduğunu kullandık. Bu geçiş sayesinde satır rankı ile sütun rankının eşit olduğunu kanıtlayabiliyoruz.

## Egzersizler

**Egzersiz 3.4.1.** Verilen matrislerin ranklarını bulunuz.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 8 & 4 & 3 \\ 4 & 11 & 0 \\ 4 & 5 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 1 & 5 & 8 \\ 5 & 6 & 9 \\ 3 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

**Egzersiz 3.4.2.** Her kare  $A$  matrisi için  $(A + A^T)^T = A + A^T$  olduğunu gösteriniz.

**Egzersiz 3.4.3.** Bir ailede yaşları büyükten küçüğe doğru sırasıyla  $K_1, K_2, K_3, K_4, 5$  adında kardeşler olsun. Bu kardeşlerden küçük olanlar büyük olanlara "Abi!" şeklinde seslenirken, büyükler küçüklere adı ile sesleniyor. Bu durumu,

- 0: Abi diye seslenenler.
- 1: Adı ile seslenenler.

olmak üzere matrisleştirin. Şimdi durumu tersine çevirelim, büyükler küçüklere "Abi!" desin ve küçükler büyüklere adı ile seslensin. Bu durumdaki matris orijinal matrisle nasıl bir ilişki içindedir?

### 3.5 Taban Geçiş Matrisleri

Matrisleri yazarken tabanları kullanıyoruz. Sistem basit: Tanım kümesinden bir taban al; o tabanın görüntü kümesini bul; uzayın görüntü kümesini bul; tabanın görüntü kümesinin elemanlarını uzayın görüntüsünün tabanı şeklinde yaz; her bir katsayıyı sırayla bir sütuna diz ve ta da! Bir matris oluşturduk. Fakat bu durum yeterli olmayabilirdi. Bildiğimiz gibi bir uzayın birden fazla tabanı olabilir. Bizim bu bölümdeki amacımız ise bu tabanlar arasındaki ilişkiyi kurmak olacak.

Öncelikle  $Id : V \rightarrow V$  doğrusal dönüşümünü ele alalım. Bu dönüşümün matrisinin birim matris olduğunu düşünüyorsanız bu düşünceniz hem doğru hem de yanlış. Doğrudur, eğer görüntü ve tanım kümesinden aynı tabanı seçerseniz birim matris elde edersiniz, fakat eğer  $e_1, e_2, \dots, e_n$  ve  $f_1, f_2, \dots, f_n$  gibi iki farklı taban seçerseniz bu durumda her  $i$  sütunu için;

$$Id(e_i) = e_i = a_{1i}f_1 + a_{2i}f_2 + \dots + a_{ni}f_n$$

gibi bir yazılım elde edersiniz. Dolayısıyla birim matris elde etmeyebiliriz de. Örneğin  $\mathbb{R}^2$  uzayında  $\{(1, 0), (0, 1)\}$  ve  $\{(2, 3), (-1, 4)\}$  tabanlarını seçelim. Bu durumda;

$$(1, 0) = \frac{4}{11}(2, 3) - \frac{3}{11}(-1, 4)$$

$$(0, 1) = \frac{1}{11}(2, 3) + \frac{2}{11}(-1, 4)$$

olacağından,  $\mathcal{M}(Id)$  matrisini  $\begin{bmatrix} 4/11 & 1/11 \\ -3/11 & 2/11 \end{bmatrix}$  olarak buluruz. Görüldüğü üzere bu matris hiç de birim matris değildir.  $\mathcal{M}(Id)$  matrislerine **geçiş matrisi** adı verilir. Bu matris, bir uzayın iki tabanı arasındaki geçişi ifade eder. Daha açık olması açısından tanım kümesinden bir  $e$  tabanı ve görüntü kümesinden bir  $f$  tabanı seçelim. Bu matrisi  $\mathcal{M}_{e,f}(Id)$  olarak da gösterebileceğimizi anımsatalım.

**Önsav 3.5.1.**  $\mathcal{M}_{g,f}(T)\mathcal{M}_{e,g}(S) = \mathcal{M}_{e,f}(T \circ S)$

Bu önerme, matris çarpmasının tanımından ve doğrusal dönüşümlerle ilişkisinden hemen çıkar. Biz bu önermenin daha doğal bir sonucu ile ilgileneceğiz.

**Sonuç 3.5.1.**  $I = \mathcal{M}_{e,e}(Id) = \mathcal{M}_{e,f}(Id)\mathcal{M}_{f,e}(Id) = \mathcal{M}_{f,e}(Id)\mathcal{M}_{e,f}(Id)$

Bu önerme, bir matrisin tersini bulmak için bize bir bilgi verir. Önsav 3.5.1'in direkt bir sonucudur.

**Önsav 3.5.2.**  $T \in \text{End}(V)$  olsun.  $A = \mathcal{M}_{e,e}(T)$  ve  $B = \mathcal{M}_{f,f}(T)$  olsun ve  $C = \mathcal{M}_{e,f}(Id)$  olsun. Bu durumda,

$$A = C^{-1}BC$$

eşitliği sağlanır.

**Kanıt:** Önsav 3.5.1'i iki kere uygulayalım.

$$\mathcal{M}_{e,f}(T) = \mathcal{M}_{e,f}(T \circ Id) = \mathcal{M}_{e,f}(Id \circ T) = \mathcal{M}_{f,e}(Id)\mathcal{M}_{f,f}(T) = \mathcal{M}_{f,e}(Id)B$$

Buradan  $\mathcal{M}_{e,f}(T) = C^{-1}B$  elde ederiz.

$$\mathcal{M}_{e,f}(T) = \mathcal{M}_{e,f}(T \circ Id) = \mathcal{M}_{e,e}(T)\mathcal{M}_{f,e}(Id) = AC^{-1}$$

Buradan  $AC^{-1} = C^{-1}B$  gelir. O halde bu eşitliği

$$A = A(C^{-1}C) = (AC^{-1})C = (C^{-1}B)C = C^{-1}BC$$

şeklinde düzenleyerek istediğimizi elde ederiz.  $\square$

Matrisler ve taban geçişlerinin birden çok uygulaması vardır. Bunlardan en önemli doğrusal denklem sistemleridir. Önsav 3.2.2'de, matrislerin nasıl denklem çözümünde kullanılabileceğini gördük. Biz de bu gibi şeyler yaparak denklem sistemlerini nasıl çözebiliriz?

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

Bir denklem sistemi olsun. Bu sistemdeki her bir denklemi sağlayan  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  vektörlerine sistemin bir çözümü denir.  $b = (b_1, \dots, b_m)$  olsun. Bir

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

matrisi için bu sistemi  $Ax = b$  olarak kısaca ifade edebiliriz. Eğer doğrusal dönüşümleri tanım olarak kullanmak istiyorsanız

$$T : \mathcal{F}^n \rightarrow \mathcal{F}^m, T(v) = Av$$

için denklemi  $b = T(v)$  olarak da ifade edebiliriz. Bu denklemin en az bir çözümü olması için gerek ve yeter şartın  $b \in \text{im } T$  olduğuna dikkat edin. Eğer  $T$  örten ise denklemin bir çözümü olması gerektiği bariz. Genel bir şey söylemeden önce  $T$ 'nin ne zaman örten olduğunu  $n = m$  iken Teorem 3.2.4 sayesinde daha rahat bir şekilde anlayabiliyoruz. Bunu bir sonraki teoremden kullanacağız.

**Teorem 3.5.1.**

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

*bir denklem sistemi olsun. Sistemi  $Ax = b$  formunda düşünün:  $\text{rank}(A) = n$  olması için gerek ve yeter şart denklemin yalnızca bir çözümü olmasıdır.*

**Kanıt:** Bu oldukça kolay bir kanıttır.  $\text{rank}(A) = n$  olsun. Denklem, doğrusal dönüşüm olarak  $T(x) = b$  sistemine karşılık geliyor olsun. O halde,  $\text{rank } A = \dim(\text{im } T)$  olur. Teorem 3.2.3'ten

$$\dim(\mathcal{F}^n) = n = \dim(\ker T) + \dim(\text{rank } T) = \dim(\ker T) + n$$

elde edilir. Demek ki  $T$  birebirmiş. Teorem 3.2.4'ten ötürü  $T$  bir izomorfizma imiş. O halde  $T(x) = b$  denkleminin yalnızca bir çözümü vardır.

Ters yöne bakalım. Denklemin yalnızca bir çözümü olsun. O halde  $|\ker T| = 1$  olmalıdır. Demek ki  $\dim(\ker T) = 0$  olmalıymış. Teorem 3.2.3'ten sonuç gelir.  $\square$

Peki ya  $\text{rank } A < n$  ise ne olur? Hemen inceleyelim: Diyelim ki  $\text{rank } A = m$ . Bir  $x \in \mathcal{F}^n$  vektörü,  $T(x) = Ax = b$  sisteminin bir çözümü olsun. Açıkça  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  yazalım.  $A$  matrisinin rankı,  $n$ 'den küçük olduğundan satır vektörleri doğrusal bağımlıdır. Bu vektörlerden  $m$  tanesi taban belirtecek şekilde  $n - m$  tanesini eleyelim. Bu elelen satırlar  $x_{i_1}, \dots, x_{i_{n-m}}$  satırlarına denk gelsin. O halde  $x$  vektörü,  $b_{i_1}, \dots, b_{i_{n-m}} = 0$  olacak şekilde  $T|_{\mathcal{F}^k}(x) = (b_1, \dots, b_n)$  sistemini de çözer. Bu barizdir, çünkü bir fonksiyonu belli bir kümeye sıkıştırıp çözmüş olduk. Bu durumda geriye kalan  $x_{i_1}, \dots, x_{i_{n-m}}$  değerleri ne olursa olsun  $Ax = b$  denklemini sağlar. Bu değişkenler, bağımsız değişken olarak adlandırılır.  $\mathcal{F} = \mathbb{C}$  durumunda eğer denklemin bir çözümü varsa o halde sonsuz çözümü olmalıdır. Çünkü bağımsız değişkenler istediği değeri alabilirler ve denklem yine de sağlanır. O halde rank, halihazırda denklemi birkaç kategoriye ayırıyor bile. Eğer rank değişken sayısına eşitse sistemin bir çözümü vardır, eğer değilse ya ortada bir çözüm yoktur ya da sonsuz çözüm vardır.

### 3.6 Çoklu Doğrusal Formlar

Sonlu sayıda  $i$ 'ler için  $V_i$  vektör uzaylarını düşünün. Bu bölümde  $V_1 \times V_2 \times \dots \times V_n$  kümesi üzerinde bir dönüşüm tanımlayacağız. Elbette,  $V_1 \times V_2 \times \dots \times V_n$  Kartezyen çarpımı da bir vektör uzayı olarak görülebilir. Hatta bir  $f : V_1 \times V_2 \times \dots \times V_n \rightarrow \mathcal{F}$  doğrusal dönüşümü de yazabilirsiniz. Fakat doğrusal dönüşümler,

$$f(v_1 + u_1, \dots, v_n + u_n) = f(v_1, \dots, v_n) + f(u_1, \dots, u_n)$$

özelliğini sağlarlar. Yani doğrusal dönüşümler, girdilerdeki her vektör için aynı anda sağlanmalıdır. Biz bundan daha farklı bir şey tanımlayacağız.  $f : \prod V_i \rightarrow \mathcal{F}$  fonksiyonunu;

$$f(v_1, \dots, v_{i-1}, v_i + u_i, v_{i+1}, \dots, v_n) = f(v_1, \dots, v_{i-1}, v_i, v_{i+1}, \dots, v_n) + f(v_1, \dots, v_{i-1}, u_i, v_{i+1}, \dots, v_n)$$

özelliğini sağlayacak şekilde tanımlayalım. Yani her girdide aynı anda doğrusal olmak yerine teker teker her  $i$ 'inci girdide doğrusal olsun. Tabii bunun için  $T(av_1, \dots, av_n) = aT(v_1, \dots, v_n)$  özelliği yerine

$$T(v_1, \dots, av_i, \dots, v_n) = aT(v_1, \dots, v_i, \dots, v_n)$$

tanımını da yapmamız gerekir. Artık doğrusal dönüşümlerden daha farklı bir yapı var elimizde. Bu yapıya **çoklu doğrusal form (multilineer form)** ya da her  $i$  için  $V_i = V$  olduğu durumda  **$n$ -lineer form** adı verilir. Biraz örnek verelim.

- En bariz örneği ilk başta verelim: Her doğrusal form, bir 1-linear formdur.
- $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonunu,

$$f((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

olarak tanımlayalım. Bu bir 2-linear formdur.  $\mathbb{R}^n$  uzayından iki vektör alarak bir reel sayı değeri verir. 2-linear formlara özel olarak **bilineer form** adı verilir.

- $\varphi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  dönüşümünü  $\varphi((a, c), (b, d)) = ad - bc$  formülü ile tanımlayalım. Bu dönüşüm **determinant** adını alacak olan özel bir çoklu doğrusal dönüşümdür. Bu konuya ilerde daha detaylı değineceğiz.
- $\pi : V \times V^* \rightarrow \mathcal{F}$  dönüşümünü  $\pi(u, \varphi) = \varphi(u)$  kuralı ile tanımlayalım. Bunun bir çoklu doğrusal form olduğunu göstermek kolaydır.

Biz genel olarak  $n$ -lineer formlar ile çalışacağız. Basit bir eşitlikle başlayalım.

**Önsav 3.6.1.**  $f : V^n \rightarrow \mathcal{F}$  bir  $n$ -lineer form olsun. Her  $a \in \mathcal{F}$  için

$$f(av_1, av_2, \dots, av_n) = a^n f(v_1, \dots, v_n)$$

eşitliği sağlanır.

**Kanıt:** Tanımdan hemen çıkar.  $\square$

**Önsav 3.6.2.**  $f$  bir  $n$ -lineer form olsun. En az bir  $1 \leq i \leq n$  için  $v_i = 0$  ise  $f(v_1, \dots, v_n) = 0$  olur.

**Kanıt:** Genelliği bozmadan  $i = 1$  alabiliriz. O halde

$$f(0, v_2, \dots, v_n) = f(0 + 0, v_2, \dots, v_n) = f(0, v_2, \dots, v_n) + f(0, v_2, \dots, v_n)$$

eşitliğinde en sağ tarafı en sol tarafa eşitleyerek  $f(0, v_2, \dots, v_n) = 0$  sonucuna varırız.  $\square$

Size bir soru: Diyelim  $V$ 'nin bir  $e$  tabanı var,  $\dim(V) = k$  olsun, bu tabana göre doğrusal formun bir matrisini yazabilir miyiz? Cevap veriyorum: Evet. Fakat matris yazmak çok anlamsız olur. Zira yazacağımız matrisin  $1 \times k^n$  formunda olması gerekir ve tek sütun için matris yazmak anlamlı olmayabilir. Aslında,  $\mathcal{M}_{1 \times k^n}(\mathcal{F}) \cong \mathcal{F}^{k^n}$  izomorfizmasından bahsedebiliriz. Bunun için tek yapmamız gereken şey sütun vektörü olarak görülen bir elemanı bir vektör olarak görmek.  $V$  üzerindeki  $n$ -lineer formların kümesi  $\mathcal{L}_n(V)$  olarak gösterilir. Böylece  $\mathcal{L}_n(V) \cong \mathcal{F}^{k^n}$  yazabiliriz. Tabii, bunları söylemeden önce matrisin yapısını hesaplamaya çalışalım.

$e = \{e_1, \dots, e_k\}$  kümesi  $V$ 'nin bir tabanı olsun. Herhangi bir  $f(v_1, \dots, v_n)$  elemanını ele alalım.

$$\begin{aligned} f(v_1, \dots, v_n) &= f\left(\sum_{i=1}^k a_{i1}e_i, \dots, \sum_{i=1}^k a_{in}e_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^k a_{i1}f\left(e_i, \sum_{j=1}^k a_{j2}e_j, \dots, \sum_{l=1}^k a_{ln}e_l\right) \\ &= \sum_{i=1}^k a_{i1} \sum_{j=1}^k a_{j2}f\left(e_i, e_j, \dots, \sum_{l=1}^k a_{ln}e_l\right) \\ &= \sum_{i=1}^k a_{in}e_i \sum_{j=1}^k a_{jn}e_j \dots \sum_{l=1}^k a_{ln}e_l f\left(e_i, e_j, \dots, e_l\right) \end{aligned}$$

Böylece ne bulduk,  $f$  formunun görüntüsü,  $1 \leq i_1, i_2, \dots, i_n \leq k$  için  $f(e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_n})$  elemanları tarafından belirleniyormuş. Peki bu elemanlardan kaç tane var? Bunun için biraz kombinatorik yapabiliriz. Örneğin  $i_1$  değerinin alabileceği  $k$  farklı değer var.  $i_1$  seçildikten sonra  $i_2$  için yine  $k$  farklı değer var. O halde  $n$  farklı değişkenin her biri için  $k$  farklı değer var. O halde toplamda alabileceği  $k^n$  değer olmalı. Demek ki matrisin  $k^n$  adet sütunu var, fakat  $\dim(\mathcal{F}) = 1$  olduğundan yalnızca 1 satırı var. Demek ki gerçekten de yukarıda dediğimiz gibi  $\mathcal{L}_k(V)$  uzayı  $\mathcal{F}^{k^n}$  uzayına izomorfmuş.

**Tanım.**  $X$  boştan farklı herhangi bir küme olsun.

$$\text{Sym}(X) := \{f : X \rightarrow X \mid f \text{ birebir ve örten}\}$$

tanımını yapalım. Öncelikle  $\text{Id}_X$  birim fonksiyonu her zaman  $\text{Sym}(X)$  kümesinin elemanı olacağından  $\text{Sym}(X) \neq \emptyset$  olur. Ayrıca;

i. Her  $f, g, h \in \text{Sym}(X)$  için  $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$ ,

ii. Her  $f \in \text{Sym}(X)$  için  $f^{-1} \in \text{Sym}(X)$ ,

iii. Her  $f \in \text{Sym}(X)$  için  $\text{Id}_X \circ f = f \circ \text{Id}_x = f$

özellikleri sağlandığından  $(\text{Sym}(X), \circ)$  ikilisi bir gruptur. Bu gruba  $X$ 'in **simetri grubu** adı verilir.

Eğer  $X = \{1, 2, \dots, n\}$  ise  $\text{Sym}(X)$  yerine  $\text{Sym}(n)$  yazacağız. Bu gruplar,  $n!$  elemanlı gruplardır. Herhangi bir  $f : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$  fonksiyonu için  $f(n)$  elemanın alabileceği değerlere bakalım:  $1, 2, \dots, n$  elemanlarının hepsi olabilir değil mi? Onun için  $n$  seçeneğimiz var. Şimdi  $f(n-1)$  elemanına bakalım. E fonksiyon birebir ve örten olduğu için  $f(n-1) = f(n)$  olamaz öyle değil mi? Geriye  $n-1$  seçenek kalıyor.  $f(n-2)$  için bakacak olursak bu sefer yine  $f$  birebir ve örten olduğundan alabileceği  $n-2$  değer kalıyor. Bu hesap gereği toplam  $n \times (n-1) \times \dots \times 1$  tane birebir ve örten fonksiyon yazabiliyor olmalıyız. O halde  $\text{Sym}(X)$  grubunun  $n!$  elemanı olmalıymış.

$\text{Sym}(n)$  grubunun elemanları döngüler yardımıyla ifade edilir. Döngüleri yazmak için:

- Bir parantez açın.
- Bir  $i$  için ( $i$  şeklinde yazmaya devam edin.
- $f(i)$  değerini hesaplayın.
- Eğer  $f(i)$ , döngüdeki başka bir elemana eşitse parantezi kapatın. Yanına başka bir parantez açıp önceki döngülerdeki elemanlardan farklı bir eleman alarak ikinci adıma dönün.
- Eğer  $f(i)$ , döngüdeki elemanlardan farklı ise  $j = f(i)$  için ( $ij\dots$  yazarak döngüye devam edin ve  $j$  için üçüncü adıma dönün.
- Tüm elemanları yazdıysanız bitirin.

Bu döngülü yazıma **permütasyon** adı verilir. Örnek olarak,

$$\begin{aligned} f &\in \text{Sym}(3) \\ f(1) &= 2 \\ f(2) &= 3 \\ f(3) &= 1 \end{aligned}$$

fonksiyonuna bakalım. Bu fonksiyonu, kısaca (123) permütasyonu ile etmek mümkündür. Tekli parantezleri, (1) gibi, genelde yazmayız. Örneğin (12)(3) yerine (12) yazarız. İkili döngülere, (12) gibi, **transpozisyon** veya **makas** adı verilir. Transpozisyonlar,  $\text{Sym}(n)$  grubunun yapıtaşlarıdır. Her fonksiyonu, transpozisyonların bileşkesi şeklinde ifade edebiliriz. Bunu kanıtlamamız gerekecek.

**Önsav 3.6.3.**  $(ai) \circ (aj) = (aji)$

**Kanıt:** Bunu görmek basittir.  $g = (1i)$  ve  $f = (1j)$  olsun. Bileşkeyi sağdan başlayarak alıyoruz.

$$\begin{aligned}g(f(a)) &= g(j) = j \\g(f(j)) &= g(a) = i \\g(f(i)) &= g(i) = a\end{aligned}$$

Böylece  $i, j, a$  değerleri için döngüyü  $(aji)$  olarak yazarız.  $\square$

**Önsav 3.6.4.**  $(a_1a_2\dots a_n) = (a_1a_n)\dots(a_1a_3)(a_1a_2)$

**Kanıt:**  $n$  üzerine tümevarımla yapabiliriz.  $n = 2$  için kanıtlanacak bir şey yok.  $n = 3$  durumunda Önsav 3.6.3'ten sonuç hemen gelir.  $n - 1$  için doğru olsun. Öncelikle

$$(a_1a_2\dots a_n) = (a_1a_2\dots a_{n-1})(a_1a_n)$$

eşitliğini görelim. Buradan ve tümevarım varsayımından

$$(a_1a_2\dots a_n) = (a_1a_n)(a_1a_2\dots a_{n-1}) = (a_1a_n)(a_1a_{n-1})\dots(a_1a_2)$$

çıkar ve bu da kanıtı tamamlar.  $\square$

Demek ki  $n$ -li döngüleri gördüğümüzde hemen onu transpozisyonlara, yani ikili döngüleri ayırabiliriz. Bu da,  $Sym(n)$ 'nin tüm elemanlarının transpozisyonların bileşkesi şeklinde yazılabileceği anlamına gelir. Bu döngüleri elemanların yerlerinin değiştirilmesini ifade etmek için kullanabiliriz. Örneğin,  $\sigma = (123) \in Sym(3)$  alalım. Bir  $e_1, e_2, e_3$  tabanı için bir çoklu doğrusal form altında  $f(e_1, e_2, e_3)$  görüntüsü ile  $f(e_2, e_3, e_1)$  görüntüsü birbirinden farklı olabilir. Biz bu yer değiştirmeyi  $f(e_{\sigma(1)}, e_{\sigma(2)}, e_{\sigma(3)})$  olarak da ifade edebilirdik. Yani bir döngüyü kullanarak bir tabanı başka bir sırayla ifade edebiliriz. Ya da bir  $P(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$  çok değişkenli polinomunu ele alalım. Bir  $\sigma \in Sym(n)$  için  $P(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)})$  şeklinde, değişkenlerin yerlerini değiştirerek başka bir polinomunu ifade edebiliriz. Bu indis değiştirme numarası için simetri gruplarını bol bol kullanacağız.

**Tanım.** Bir  $\sigma \in Sym(X)$  alalım. Biliyoruz ki  $\sigma$ , sonlu sayıda transpozisyonun bileşkesi şeklinde yazılabilir. Eğer çift sayıda transpozisyonun bileşkesi ile yazılıyorsa  $\sigma$ 'ya **çift permütasyon**, tek sayıda transpozisyonun bileşkesi ile yazılıyorsa  $\sigma$ 'ya **tek permütasyon** adı verilir.

Bu tanımın anlamlı olması için hiçbir permütasyonun hem tek hem de çift olamayacağını kanıtlamalıyız. Bunun için

$$P(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i < j} (x_i - x_j)$$

reel polinomunu tanımlayalım. Herhangi bir  $\alpha = (km) \in Sym(n)$  transpozisyonunu alalım. Öncelikle  $P(x_{\alpha(1)}, \dots, x_{\alpha(n)}) = -P(x_1, \dots, x_n)$  olduğunu kanıtlayacağız. Genelliği bozmadan  $k < m$  varsayımını yapabiliriz. Her  $i \in \{1, \dots, n\}$  ve  $i < j$  için  $(x_i - x_j)$  terimlerini tek bir satırda toplayalım. Bir sonraki sayfada bu polinomun açılmış halini görebilirsiniz.

$$\begin{aligned}
P(x_1, \dots, x_n) &= (x_{n-1} - x_n) \\
&\vdots \\
&(x_m - x_{m+1}) \dots (x_m - x_n) \\
&\vdots \\
&(x_k - x_{k+1}) \dots (x_k - x_m) \dots (x_k - x_n) \\
&\vdots \\
&(x_1 - x_2) \dots (x_1 - x_k) \dots (x_1 - x_m) \dots (x_1 - x_n)
\end{aligned}$$

Şimdi  $(km)$  permütasyonunu uygulayalım. Yani  $k$  ve  $m$  indislerinin yerini değiştirelim. Böylece yeni polinomumuz,

$$\begin{aligned}
P(x_{\alpha(1)}, \dots, x_{\alpha(n)}) &= (x_{n-1} - x_n) \\
&\vdots \\
&(x_k - x_{m+1}) \dots (x_k - x_n) \\
&\vdots \\
&(x_m - x_{k+1}) \dots (x_m - x_k) \dots (x_m - x_n) \\
&\vdots \\
&(x_1 - x_2) \dots (x_1 - x_m) \dots (x_1 - x_k) \dots (x_1 - x_n)
\end{aligned}$$

oldu. Dikkat ederseniz  $k$ 'nincinin altındaki satırlarda  $(x_i - x_k)$  ile  $(x_i - x_m)$  terimlerinin yerleri değişıyor. Fakat onun dışında polinom aynı kalıyor.  $i < m$  için  $k$ 'ninci satırda ise  $(x_k - x_i)$  terimi ile  $i$ 'inci satırdaki  $(x_i - x_m)$  terimi karşılıklı olarak hem yer değiştiriyor hem de işaret değiştiriyor. İşaret değiştirme karşılıklı olduğu için polinom değişmiyor. Nasıl olsa  $6 = 2 \times 3$  yazabileceğimiz gibi işaretleri karşılıklı olarak değiştirerek  $6 = (-2) \times (-3)$  yazabiliriz, öyle değil mi?  $m < i$  için ise  $(x_k - x_i)$  terimi ile  $m$ 'inci satırdaki  $(x_m - x_i)$  elemanları yer değiştiriyor. İşaret değişimi olmadığından polinom aynı.  $k$ 'inci satırda değişen tek terim  $(x_k - x_m)$  terimidir. O da  $(x_m - x_k)$  şeklinde işaret değiştiriyor. Şimdi  $m < i$  için  $i$ 'inci satıra bakalım. Bu satırlarda  $k$  ve  $m$  terimleri bulunmadığından bir şey değişmiyor. Böylece  $(x_k - x_m)$  terimi haricinde polinom değişmemiş oldu. Değişen tek terimin ise işareti değişıyor. Böylece  $P(x_{\alpha(1)}, \dots, x_{\alpha(n)}) = -P(x_1, \dots, x_n)$  yazabiliyoruz. Bir kere transpozisyon uygulamak polinomun işaretini değiştiriyor. İki kere uygularsak eski haline geliyor olmalı. Buradan tümevarımla çift sayıda permütasyonun polinomu aynı bıraktığı, tek sayıda permütasyonun polinomun işaretini değiştirdiği anlamlarını çıkarırız. Demek ki bir permütasyon hem tek hem de çift olamaz, zira olsaydı  $-P = P$  olurdu ve  $P \neq 0$  olduğundan bu bir çelişki olurdu.

**Tanım.**  $\text{sgn} : \text{Sym}(n) \rightarrow \{-1, 1\}$  fonksiyonunu

$$\text{sgn}(\sigma) = \begin{cases} -1, & \sigma \text{ tek} \\ 1, & \sigma \text{ çift} \end{cases}$$

kuralı ile verelim. Bu fonksiyon altında  $\sigma$ 'nın görüntüsü,  $\sigma$ 'nın **işareti** adını alır.

Bir  $\sigma$  permütasyonu ile  $\sigma^{-1}$  permütasyonunun işareti aynıdır. Bir takım  $\beta_i$  transpozisyonları için

$$\sigma = \beta_1 \circ \cdots \circ \beta_n$$

ise çoraplar ve ayakkabılar özelliğinden

$$\sigma^{-1} = \beta_n^{-1} \circ \cdots \circ \beta_1^{-1}$$

yazabiliriz. Böylece bir permütasyon ile onun tersinin işaretinin aynı olduğu sonucuna varırız. Permütasyon ve işaret mevzuları bir sonraki tanımlar için gerekli olacak.

**Tanım.** Eğer bir  $f \in \mathcal{L}_k(V)$  fonksiyonu, her  $\sigma \in \text{Sym}(k)$  ve her  $v_i \in V$  için

$$f(v_1, \dots, v_k) = f(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)})$$

özellikliğini sağlıyorsa  $f$ 'ye **simetrik form** denir.

Bariz bir şekilde sabit sıfır fonksiyonu simetrik bir formdur. Çoklu doğrusal formlara verdiğimiz ikinci örnek bir simetrik formdur. Herhangi bir  $f \in \mathcal{L}_2(V)$  için  $f(x_1, x_2) + f(x_2, x_1)$  fonksiyonu bir simetrik formdur. Genel olarak herhangi bir  $f \in \mathcal{L}_k(V)$  için  $\sum_{\sigma \in \text{Sym}(k)} f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(k)})$  fonksiyonu bir simetrik formdur. Simetrik formların uzayı  $\mathcal{S}_k(V)$  olarak gösterilir. Simetrik formlarda değişkenlerin fonksiyona hangi sırayla yazıldığı önemli değildir. Dolayısıyla tabanı yazarken...

**Tanım.** Eğer bir  $f \in \mathcal{L}_k(V)$  fonksiyonu, her  $\sigma \in \text{Sym}(k)$  ve her  $v_i \in V$  için

$$f(v_1, \dots, v_k) = \text{sgn}(\sigma) f(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)})$$

özellikliğini sağlıyorsa  $f$ 'ye **alterne form** denir.

Bariz bir şekilde sabit sıfır fonksiyonu alterne bir formdur. Bir sonraki altbölümde determinant adımı alan özel bir alterne form çalışacağız. Öncelikle alterne formların tabanlarını inceleyelim.  $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$  için  $f(e_{i_1}, \dots, e_{i_k})$  elemanları, alterne formlar için bir taban belirler. Fonksiyondaki girdilerin yerlerinin değişmesi, en fazla işareti etkiler. O yüzden birbirinden farklı  $i_1, \dots, i_k$  indislerini belli bir sırada yazarak tabanı belirlemek önemlidir. Eğer birer  $i, j$  için  $v_i = v_j$  ise

$$f(v_1, \dots, v_i, \dots, v_i, \dots, v_k) = f(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_k) = -f(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_k)$$

eşitliğinden ötürü  $f(v_1, \dots, v_i, v_i, \dots, v_n) = 0$  elde ederiz. Bunu elde etmek için eşitlikteki ikinci terimle üçüncü terimi ayırarak

$$f(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_k) = -f(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_k)$$

yazarız. Eksili ifadeyi karşıya atarak,

$$f(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_k) + f(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_k) = 0$$

elde ederiz. Buradan

$$f(v_1, \dots, v_i + v_j, \dots, v_i + v_j, \dots, v_k) = f(v_1, \dots, 2v_i, \dots, 2v_i, \dots, v_k) = 4f(v_1, \dots, v_i, \dots, v_i, \dots, v_k) = 0$$

buluruz. Buradan istediğimiz eşitliği rahatça elde ederiz. O halde taban yazmak istiyorsak  $i_m \neq i_j$  ancak ve ancak  $m \neq j$  ise olmalıdır. Demek ki alterne formlar uzayı ile ( $\mathcal{A}_k(V)$  ile gösterilir.)  $\mathcal{F}^{\binom{n}{k}}$  uzayı izomorfmuş. Bunun özel bir halini önsav ile yazalım.

**Önsav 3.6.5.**  $\mathcal{A}_n(V) \cong \mathcal{F}$ .

**Sonuç 3.6.1.** Her  $c \in \mathcal{F}$  için öyle bir ve bir tek  $f \in \mathcal{A}_n(V)$  vardır ki  $V$ 'nin bir  $e_1, \dots, e_n$  tabanı için  $f(e_1, \dots, e_n) = c$  olur.

**Önsav 3.6.6.** Eğer  $v_i, v_j$  vektörleri doğrusal bağımlı ise her  $f \in \mathcal{A}_n(V)$  için  $f(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_n) = 0$  olur.

Kanıtı bariz.  $f(v_1, \dots, v, v, \dots, v_n) = 0$  özelliğinden rahatlıkla çıkar.

Bir sonraki teorem için bir  $\sigma$  permütasyonunun kendisiyle  $n$  defa bileşkesinin alınması  $\sigma^n$  olarak gösterildiğini hatırlatalım.

**Önsav 3.6.7.**  $f \in \mathcal{A}_k(V)$  olsun.  $\sigma = (123\dots k)$  olsun. Eğer  $k$  çift ise,

$$\sum_{i=1}^k f(x_{\sigma^i(1)}, \dots, x_{\sigma^i(k)}) = 0$$

eşitliği sağlanır. Eğer  $k$  tek ise,

$$\sum_{i=1}^k f(x_{\sigma^i(1)}, \dots, x_{\sigma^i(k)}) = f(x_1, \dots, x_k)$$

eşitliği sağlanır.

**Kanıt:** Öncelikle  $(12\dots k) = (1k) \circ \dots \circ (12)$  eşitliğinde sağ tarafta  $k - 1$  terim olduğuna, dolayısıyla  $\text{sgn}(\sigma) = -1$  olduğuna dikkat edin.  $\sigma^2$  permütasyonunda ise transpozisyonlar iki kere tekrarlanacağından  $\text{sgn}(\sigma^2) = 1$  olur. Eğer  $i$  tek ise işaretin  $-1$ 'e,  $i$  çift ise işaretin  $1$ 'e eşit olduğuna dikkat edin. Bu durumda toplamayı yaparken ardışık terimlerin karşıt işaretli olmalıdır. Son olarak  $\sigma^i$  ile  $\sigma^{-i}$  aynı işaretli olduğundan ve  $f$  alterne bir form olduğundan

$$f(x_{\sigma^i(1)}, \dots, x_{\sigma^i(k)}) = \text{sgn}(\sigma^{-i}) f(x_1, \dots, x_k) = (-1)^i f(x_1, \dots, x_k)$$

eşitliği geçerlidir. Bu durumda  $k$  çift ise toplama işlemindeki ardışık terimler birbirini götürür ve sonuç sıfır çıkar. Eğer  $k$  tek ise son terim hariç tüm terimler birbirini götürür ve sonuç  $f(x_1, \dots, x_k)$  çıkar.  $\square$

Bu teorem,  $f(a, b) + f(b, a) = 0$  olduğunu söyler. Bunu görmek daha kolaydır, zira

$$f(a, b) + f(b, a) = f(a, b) - f(a, b) = 0$$

eşitliği her  $f$  alterne 2-formu için sağlanır.

**Teorem 3.6.1.**  $\mathcal{L}_2(V) = \mathcal{S}_2(V) \oplus \mathcal{A}_2(V)$

**Kanıt:**  $f \in \mathcal{S}_2(V) \cap \mathcal{A}_2(V)$  varsayımını yapalım. O halde  $f$  simetrik olduğundan  $f(x_1, x_2) = f(x_2, x_1)$  olur. Aynı zamanda  $f$  alterne olduğundan  $f(x_1, x_2) = -f(x_2, x_1)$  eşitliği sağlanır. Demek ki  $-f(x_2, x_1) = f(x_2, x_1)$  olmalıymış. Bu da  $f = 0$  demektir.

Şimdi herhangi bir  $k \in \mathcal{L}_2(V)$  alalım.

$$k(x_1, x_2) = \frac{k(x_1, x_2) + k(x_2, x_1)}{2} + \frac{k(x_1, x_2) - k(x_2, x_1)}{2}$$

eşitliğinden  $\mathcal{L}_2(V) = \mathcal{S}_2(V) + \mathcal{A}_2(V)$  elde ederiz. □

### 3.7 Determinant

Sonuç 3.6.1'i kullanarak  $f(e_1, \dots, e_n) = 1$  özelliğini sağlayan bir alterne form yazabiliriz. Bu alterne forma özel olarak **determinant** adı verilir. Bu alterne form,  $det_e$  olarak gösterilir. Bu gösterim, determinant fonksiyonunun  $e$  tabanına göre yazıldığını gösterir.

**Tanım.** Bir  $\varphi \in \text{End}(V)$  için doğrusal dönüşümün determinanti

$$det_e(\varphi) = det(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n))$$

olarak tanımlanır.

**Önsav 3.7.1.** Her  $\varphi, \psi \in \text{End}(V)$  için

$$det_e(\varphi \circ \psi) = det_e(\varphi)det_e(\psi)$$

sağlanır.

Her  $\varphi \in \text{End}(V)$  için, Sonuç 3.6.1'den ötürü  $det_e(\varphi) = a$  yazabiliriz.

**Kanıt:**  $V$ 'nin bir  $e = e_1, \dots, e_n$  tabanını ve birer  $\varphi, \psi \in \text{End}(V)$  seçelim.

$$\begin{aligned} det_e(\varphi \circ \psi) &= det_e(\varphi(\psi(e_1), \dots, \psi(e_n))) \\ &= det_e(\varphi)det_e(\psi(e_1), \dots, \psi(e_n)) \\ &= det_e(\varphi)det_e(\psi)det_e(e_1, \dots, e_n) \\ &= det_e(\varphi)det_e(\psi) \end{aligned}$$

□

Bir sonraki önsav, izomorfizmalar ile determinant arasında güçlü bir ilişki kurar.

**Önsav 3.7.2.** Eğer  $det_e(\varphi) \neq 0$  ise  $\varphi$  bir izomorfizmadır.

**Kanıt:** Önsav 3.6.6'dan ötürü  $\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)$  doğrusal bağımsızdır. Demek ki  $\dim(V) = \dim(\text{im } \varphi)$ . Teorem 3.2.4'ten ötürü  $\varphi$  bir izomorfizmadır. □

Bu durumda eğer  $det_e(\varphi) \neq 0$  ise buradan  $\mathcal{M}_e(\varphi) \in SL_n(\mathcal{F})$  sonucu çıkar.

**Sonuç 3.7.1.** Tersinir her  $\psi$  doğrusal dönüşümü ve her  $\varphi \in \text{End}(V)$  için

$$det_e(\psi^{-1} \circ \varphi \circ \psi) = det_e(\varphi)$$

çıkar.

Bu sonuç, Önsav 3.7.1'den hemen gelir.

**Teorem 3.7.1.**  $V$ 'nin iki farklı  $e = e_1, \dots, e_n$  ve  $f = f_1, \dots, f_n$  tabanını alalım. Bu durumda her  $\varphi \in \text{End}(V)$  için

$$det_e(\varphi) = det_f(\varphi)$$

eşitliği sağlanır. Yani, bir doğrusal dönüşümün determinanti seçilen tabandan bağımsızdır.

**Kanıt:** Önsav 3.1.3'ü kullanarak her  $i$  için  $\alpha(e_i) = f_i$  olacak şekilde bir  $\alpha : V \rightarrow V$  doğrusal dönüşümü yazabiliriz. O halde buradan,

$$\begin{aligned}
\det_e(\varphi) &= \det_e(\alpha^{-1} \circ \varphi \circ \alpha) \\
&= \det_e(\alpha^{-1}(\varphi(\alpha(e_1))), \dots, \alpha^{-1}(\varphi(\alpha(e_n)))) \\
&= \det_e(\alpha^{-1}(\varphi(f_1)), \dots, \alpha^{-1}(\varphi(f_n))) \\
&= \det_f(\varphi(f_1), \dots, \varphi(f_n)) \\
&= \det_f(\varphi)
\end{aligned}$$

hesabını yaparız. Sondan ikinci geçiş için  $\det_e(\alpha(f_1), \dots, \alpha(f_n)) = 1 = \det_f(f_1, \dots, f_n)$  gözlemine yapalım. Artık kanıt tamamlanmıştır.  $\square$

Bundan böyle tabanı dert etmeden  $\det_e(\varphi)$  yerine  $\det(\varphi)$  yazabiliriz.

**Tanım.** (*Matris Determinantı*) Bir  $\varphi \in \text{End}(V)$  için  $M = \mathcal{M}_e(\varphi)$  olsun.  $\det M = \det(\varphi)$  tanımını yapalım.

Bir örnek yapalım. Aşağıdaki matrisin determinantını bulabilir miyiz?

$$M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Şimdi bunu yapalım. Taban önemsiz olduğundan bir tarafta kanonik taban seçerek  $ae_1 + ce_2$  ve  $be_1 + de_2$  vektörlerini girdi kabul eden bir determinant hesabı yapabiliriz.

$$\begin{aligned}
\det M &= \det(ae_1 + ce_2, be_1 + de_2) \\
&= \det(ae_1, be_1 + de_2) + \det(ce_2, be_1 + de_2) \\
&= \det(ae_1, be_1) + \det(ae_1, de_2) + \det(ce_2, be_1) + \det(ce_2, de_2) \\
&= ab(\det(e_1, e_1)) + ad(\det(e_1, e_2)) + bc(\det(e_2, e_1)) + cd(\det(e_2, e_2)) \\
&= ad(\det(e_1, e_2)) - bc(\det(e_1, e_2)) \\
&= ad - bc.
\end{aligned}$$

Bu hesap tanıdık geldi mi? Şimdi her  $n \times n$  tipindeki matris için bir hesap yapmaya çalışalım. Tabii ki bunu anlamak için matrisin kendisi yerine ona karşılık  $\alpha$  gelen doğrusal dönüşüme bakacağız. Öncelikle bir satırı sabitleyelim. Hangisi olduğu fark etmiyor, birinci satırı seçelim. Birinci satırın katsayılarını ayırıp determinant ifadesini açalım. Böylece elimizde  $(n-1) \times (n-1)$  tipinde bir matrise indirgenmiş bir determinanat çıkacak. Buradan tümevarımla determinant hesabını yapabiliriz.

$$\begin{aligned}
\det \mathcal{M}_e(\alpha) &= \det(\alpha) \\
&= \det\left(\sum_{i=1}^n a_{i1}e_i, \dots, \sum_{j=1}^n a_{jn}e_j\right) \\
&= a_{11}(\det(e_1, \dots, \sum_{j=1}^n a_{jn}e_j)) + \det\left(\sum_{i=2}^n a_{i1}e_i, \dots, \sum_{j=1}^n a_{jn}e_j\right) \\
&= a_{11}(a_{12}(\det(e_1, e_1, \dots, \sum_{j=1}^n a_{jn}e_j)) + \det(e_1, \sum_{k=2}^n a_{kn}e_k, \dots, \sum_{j=1}^n a_{jn}e_j)) \\
&\quad + \det\left(\sum_{i=2}^n a_{i1}e_i, \dots, \sum_{j=1}^n a_{jn}e_j\right) \\
&\quad \vdots \\
&= a_{11}(\det(e_1, \dots, \sum_{j=2}^n a_{jn}e_j)) + \det\left(\sum_{i=2}^n a_{i1}e_i, \dots, \sum_{j=1}^n a_{jn}e_j\right) \\
&\quad \vdots \\
&= a_{11}(\det(e_1, \dots, \sum_{j=2}^n a_{jn}e_j)) + a_{12}(\det\left(\sum_{i=2}^n a_{i1}e_i, e_1, \dots, \sum_{j=2}^n a_{jn}e_j\right)) + \dots \\
&\quad + \det\left(\sum_{i=2}^n a_{i1}e_i, \dots, \sum_{j=1}^n a_{jn}e_j\right) \\
&= a_{11}(\det(e_1, \dots, \sum_{j=2}^n a_{jn}e_j)) + a_{12}(\det\left(\sum_{i=2}^n a_{i1}e_i, e_1, \dots, \sum_{j=2}^n a_{jn}e_j\right)) + \dots \\
&\quad + a_{1n}(\det\left(\sum_{i=2}^n a_{i1}e_i, \dots, e_1\right)) \\
&= \sum_{r=1}^n (a_{1r})(\det\left(\sum_{i=2}^n a_{i1}e_i, \dots, e_1, \dots, \sum_{j=2}^n a_{jn}e_j\right)) \\
&= \sum_{r=1}^n (a_{1r})(-1)^{1+r}(\det(e_1, \sum_{i=2}^n a_{i1}e_i, \dots, \sum_{j=2}^n a_{jn}e_j))
\end{aligned}$$

Buradaki  $(a_{1r})(-1)^{1+r}$  sayısına bir **kofaktör** denir. Eğer bir  $n \times n$  matrisin belli birer  $i, j$  için  $i$ 'inci satırın ve  $j$ 'nci sütununu silersek bir  $(n-1) \times (n-1)$  matris elde ederiz. Bu matriste  $i = 1$  alındığında matrisin determinanı en sondaki  $\det(e_1, \sum_{i=2}^n a_{i1}e_i, \dots, \sum_{j=2}^n a_{jn}e_j)$  terimine denk geliyor. Söz konusu matris minör matris denir ve  $M_{i,j}$  ile gösterilir. Böylece bir matrisin determinantının genel formunu

$$\det M = \sum_{j=1}^n (a_{ij})(-1)^{i+j} M_{i,j}$$

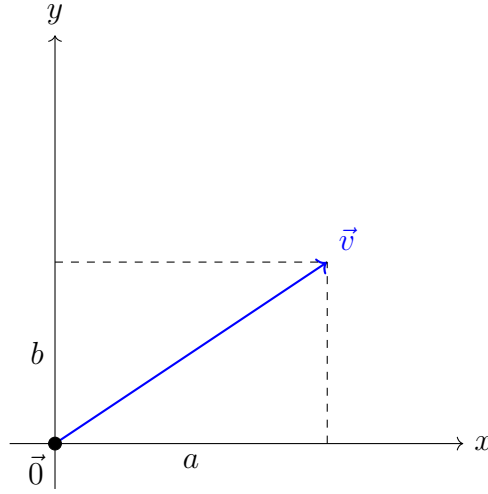
olarak yazabiliriz. Bundan böyle bir  $A$  matrisin determinantını "det  $A$ " yerine  $|A|$  ile de gösterebiliriz.

... buraya bir takım önsavlar ve özellikler gelecek.

## 4 İç Çarpım Uzayları

### 4.1 Geometriye Giriş

Bu bölümde lineer cebirin geometrik yanı hakkında konuşacağız. Geometri denince aklımıza neler geliyor? Uzunluk, alan, açı, diklik... Bütün bunlara tek tek değineceğiz. Öncelikle uzunluk kavramını biraz sezgileştirelim. Giriş kısmında vektörleri belirli büyüklüklerdeki oklar olarak görmüştük. Hatta skalerle çarpma işlemi yaparak vektörün uzunluğunu değıştirebiliyoruz. Peki ama nedir bu uzunluktan kastımız? Nasıl tanımlanır? Nasıl hesaplanır? Diyelim vektör ve uzunluk hesaplayabiliyoruz, peki açığı nasıl hesaplayacağız? Açı varsa iki vektörün dik olup olmadığına nasıl karar vereceğiz? Hepsi tek tek cevap vereceğiz. Öncelikle bazı gözlemler yapmamız gerek.

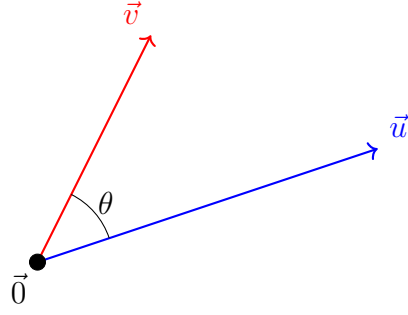


Şekil 14: Düzlemde Bir Reel Vektör

Bir  $(a, b)$  reel vektörünü yukarıdaki gibi resmedelim. Bu vektörün uzunluğunu Pisagor teoremi yardımıyla  $\sqrt{a^2 + b^2}$  olarak hesaplayabiliriz. Eğer  $a$  veya  $b$  bileşenlerinden herhangi biri negatif olsaydı bile  $x^2 = (-x)^2$  eşitliğinden ötürü genel bir formül yazabiliyoruz. Bu sayıya vektörün **normu** adı verilir ve  $\|\vec{v}\|$  olarak gösterilir. Buna özel olarak daha sonrasında değineceğiz. Her vektör uzayında norm tanımlanamayabilir. Üzerinde norm tanımlanabilen vektör uzaylarına **normlu uzay** adı verilir. Bir vektör uzayında tek bir norm tanımlı olmak zorunda değildir. Örneğin  $\mathbb{R}^n$  üzerinde,

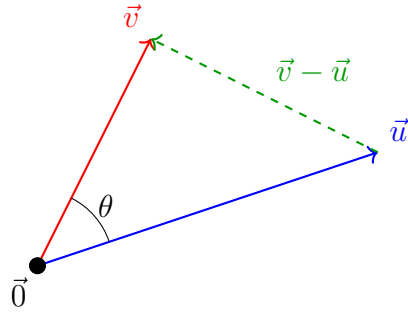
$$\|(a_1, \dots, a_n)\| = |a_1| + \dots + |a_n|$$

şeklinde bir norm da tanımlanabilir. Şimdiden  $\mathbb{R}^2$  üzerinde iki farklı norm tanımladık bile. Tüm bunlar bize farklı amaçlarda farklı geometrik özellikler verebilir. Fakat hala daha açı kavramına girebilmiş değiliz.



Şekil 15: İki vektör arasındaki açı

Bir deneme yapalım,  $u = (a, b)$  ve  $v = (c, d)$  olsun. O halde araya  $v - u = (c - a, d - b)$  vektörünü çizebiliriz.



Şekil 16:  $v - u$  vektörü

Kosinüs teoremini kullanarak bu üç uzunluk ve aradaki açı arasında bir bağıntı kurabiliriz:

$$\|u\|^2 + \|v\|^2 - 2 \cos(\theta) \|u\| \cdot \|v\| = \|v - u\|^2$$

Uzunluğun formülü, yani normu açarak  $a, b, c, d$  cinsinden bir bağıntı elde ederiz:

$$(a^2 + b^2) + (c^2 + d^2) - 2 \cos(\theta) \sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)} = (c - a)^2 + (d - b)^2$$

Gerekli düzenlemeleri yaparak:

$$-2 \cos(\theta) \sqrt{(ac)^2 + (ad)^2 + (bc)^2 + (bd)^2} = -2(ac + bd)$$

elde ederiz. Her iki tarafın  $-2$  ile bölelim::

$$\cos(\theta) \sqrt{(ac)^2 + (ad)^2 + (bc)^2 + (bd)^2} = (ac + bd).$$

Formülün son hali şu şekilde oldu:

$$\cos(\theta) = \frac{ac + bd}{\|u\| \cdot \|v\|}.$$

İsterseniz sinüsü de hesaplayabiliriz.  $1 - \cos^2(\theta) = \sin^2(\theta)$  özdeşliğini kullanarak:

$$\begin{aligned}
\sin^2(\theta) &= 1 - \cos^2(\theta) \\
&= 1 - \frac{(ac)^2 + 2abcd + (bd)^2}{(ac)^2 + (ad)^2 + (bc)^2 + (bd)^2} \\
&= \frac{(ac)^2 + (ad)^2 + (bc)^2 + (bd)^2 - ((ac)^2 + 2abcd + (bd)^2)}{(ac)^2 + (ad)^2 + (bc)^2 + (bd)^2} \\
&= \frac{(ad)^2 - 2abcd + (bc)^2}{\|u\|^2 \cdot \|v\|^2} \\
&= \frac{(ad - bc)^2}{\|u\| \cdot \|v\|} \\
&= \frac{\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}^2}{\|u\|^2 \cdot \|v\|^2}
\end{aligned}$$

gibi bir formülasyon elde ederiz. Kosinüsü yazarken pay kısmındaki  $ac + bd$  ifadesi,  $(a, b)$  ve  $(c, d)$  vektörlerinin **standart iç çarpımı** olarak bilinir. Standart iç çarpım, simetrik bir  $\mathcal{L}_2(\mathbb{R}^n)$  fonksiyonu olup

$$\langle (a_1, a_2, \dots, a_n), (b_1, b_2, \dots, b_n) \rangle = \sum_{i=1}^n a_i b_i$$

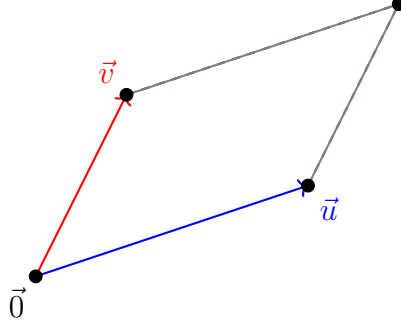
kuralı ile yazılır. Ayrıca bir  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  vektörü için  $\|x\|^2 = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = \langle x, x \rangle$  eşitliğine dikkat edin. Yani standart iç çarpım her nasıl bir şeyse hem açı hem de uzunluk hakkında fikir verebiliyor. O yüzden bu iç çarpım meselesini özellikle konuşacağız. Ayrıca sinüsü yazarken paydaki determinant ifadesini vektörel çarpım ile ilişkilendireceğiz.

Vektörler ile yapacağımız geometrik işlemler bu kadarla da kalmıyor. Şimdi bir paralel kenarın alanını hesaplamayı formülleştirelim. Aralarındaki açı  $\theta$  olan iki  $u = (c, d), v = (a, b)$  vektörünü ele alalım. Uzunlukları  $a, b$  ve arasındaki açı  $\theta$  bir paralel kenarın alan formülünü

$$\text{Alan} = ab \sin \theta$$

olarak hesaplayabiliriz. Tek yapmamız gereken şey bunu vektörlere uygulamak:

$$\text{Alan} = \|u\| \|v\| \sin \theta = \|u\| \|v\| \frac{\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}}{\|u\| \|v\|} = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}.$$



Şekil 17: İki vektörle oluşturulan paralelkenar

Demek ki iki  $u, v$  vektörünün girdilerini sütun vektörü kabul eden matrisin determinantının mutlak değeri, iki vektör ile oluşturulan paralelkenarın alanını veriyormuş. Formülüze ederken mutlak değeri kullanmadık fakat okur bunun gerekli olduğunu göz önünde bulundurmalı. Bu durumda  $u, v$  ve  $v-u$  vektörlerinin sınırladığı üçgenin alanıysa

$$\frac{\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}}{2}$$

olarak bulunur. Görsel olarak Şekil 16'yı gözleyebilirsiniz.

Son olarak dikliğe bakalım. Bazı vektörlerin dik olup olmadığına iç çarpımlarına bakarak karar verebiliriz. İki vektörün dik olması için gerek ve yeter şart aralarındaki  $\theta$  açısı için  $\cos \theta = 0$  olmasıdır. Elimizde kosinüs formülü olduğundan bu koşulu rahatlıkla yeniden yapılandırabiliriz.

$$\cos \theta = \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \cdot \|v\|}$$

formülüne göre  $\cos \theta = 0$  olması için gerek ve yeter şart iki vektörün standart iç çarpımlarının sıfır olmasıdır. O halde dik vektörler hakkında da konuşabiliyoruz. İki vektör dik ise bu durum  $u \perp v$  olarak gösterilir.

## 4.2 İç Çarpım Uzayları

Önceki bölümde standart iç çarpımın geometri açısından öneminden bahsettik. Fakat bir vektör uzayı üzerine tanımlanabilen tek iç çarpım standart iç çarpım olmayabilir.  $V$  bir reel vektör uzayı ve  $\langle, \rangle \in \mathcal{S}_2(V)$  olsun. Bu bilinear form için aşağıdaki özellikler sağlanıyorsa  $\langle, \rangle$  fonksiyonuna  $V$  üzerinde bir iç çarpım denir:

- Her  $x \in V$  için  $\langle x, x \rangle \geq 0$ ,
- $\langle x, x \rangle = 0$  olur ancak ve ancak  $x = 0$  ise.

Bu durumda  $(V, \langle, \rangle)$  ikilisine bir **iç çarpım uzayı** adını alır. Yukarıdaki iki koşula **pozitif tanımlılık** adı verilir. Bir  $\langle, \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonunun iç çarpım olduğunu göstermek için fonksiyonun bir bilinear form olduğunu kontrol edin, bilinear formun simetrik olduğunu kontrol edin ve pozitif tanımlı olduğunu teyit edin. Bir örnek olarak standart iç çarpım fonksiyonunun gerçekten de iç çarpım tanımına uyduğunu gösterelim:

- (Bilinearlik) Öncelikle standart iç çarpımın  $(a_1, \dots, a_n)$  ve  $(b_1, \dots, b_n)$  reel vektörleri için

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i$$

kuralı ile tanımlanan  $\langle, \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonu olduğunu hatırlatalım.

$$\begin{aligned} \langle (a_1, \dots, a_n), (b_1, \dots, b_n) + (c_1, \dots, c_n) \rangle &= \langle (a_1, \dots, a_n), (b_1 + c_1, \dots, b_n + c_n) \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n a_i (b_i + c_i) \\ &= \sum_{i=1}^n (a_i b_i + a_i c_i) \\ &= \sum_{i=1}^n a_i b_i + \sum_{i=1}^n a_i c_i \\ &= \langle (a_1, \dots, a_n), (b_1, \dots, b_n) \rangle + \langle (a_1, \dots, a_n), (c_1, \dots, c_n) \rangle \end{aligned}$$

Şimdi herhangi bir  $c \in \mathbb{R}$  alalım. O halde;

$$\begin{aligned} \langle (ca_1, \dots, ca_n), (b_1, \dots, b_n) \rangle &= \sum_{i=1}^n (ca_i) b_i \\ &= \sum_{i=1}^n c (a_i b_i) \\ &= c \sum_{i=1}^n a_i b_i \\ &= c \langle (a_1, \dots, a_n), (b_1, \dots, b_n) \rangle \end{aligned}$$

Bu hesaplara göre ilk koordinata göre doğrusallık sağlanıyor. İkinci koordinata göre doğrusallığı göstermeyi okura bırakıyoruz.

- (Simetri) Simetri bariz, zira her  $i$  için  $a_i b_i = b_i a_i$  sağlanır.
- (Pozitif Tanımlılık) Herhangi bir  $x = (x_1, \dots, x_n)$  reel vektörü alalım. Pozitif tanımlılığı göstermeye çalışalım:

$$\langle x, x \rangle = x_1 x_1 + \dots + x_n x_n = x_1^2 + \dots + x_n^2.$$

Yukarıdaki eşitliğin sağ tarafında her  $i$  için  $x_i^2 \geq 0$  olduğundan  $\langle x, x \rangle$  eşitsizliği sağlanmak zorunda.

Eğer  $x = 0$  ise  $\langle x, x \rangle = 0$  olduğu Önsav 3.6.2'nin direkt sonucu. Tersini kanıtlamak için  $\langle x, x \rangle = 0$  varsayımını yapalım. Bu durumda

$$0 = \langle x, x \rangle = x_1^2 + \dots + x_n^2$$

eşitliğinden ötürü ve  $x_i$ 'ler reel sayı olduğundan ancak ve ancak her  $i$  için  $x_i = 0$  ise bu eşitlik sağlanır. O halde  $x = (0, \dots, 0)$  olmalıymış.

Böylece standart iç çarpımın gerçekten de bir iç çarpım olduğunu görmüş olduk. İç çarpımı reel sayılarla kısıtlamak zorunda değiliz. Karmaşık sayılar için daha genel bir iç çarpım tanımı yapılabilir.  $V$  bir karmaşık vektör uzayı olsun.

- (Bilineerlik) Her  $x, y, z \in V$  ve  $\lambda \in \mathbb{C}$  için

$$* \langle x, y + z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$$

$$* \langle x + z, y \rangle = \langle x, y \rangle + \langle z, y \rangle$$

$$* \langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle = \langle x, \bar{\lambda} y \rangle$$

sağlanıyorsa,

- (Eşlenik Simetri) Her  $x, y \in V$  için

$$\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$$

oluyorsa,

- (Pozitif Tanımlılık) Her  $x \in V$  için  $\langle x, x \rangle$  oluyorsa ve  $\langle x, x \rangle = 0$  olması için gerek ve yeter şart  $x = 0$  eşitliğinin sağlanması ise,

$\langle, \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$  fonksiyonuna bir iç çarpım fonksiyonu denir. Reel iç çarpımdaki koşulları eşlenikliğe göre değiştirmek durumunda kaldık. Böylece

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i \bar{y}_i$$

fonksiyonu karmaşık sayılar üzerinde bir iç çarpım belirtir. Bir  $x$  reel sayısının karmaşık eşleniği kendisine eşit olduğundan bu tanım reel sayılar için de geçerlidir. İç çarpım uzaylarına bazı örnekler verelim.

- $\mathbb{R}[x]$  uzayında, her  $1 \leq i \leq n$  için  $x_i \in \mathbb{R}$  olmak üzere

$$\langle p(x), q(x) \rangle = \sum_{i=1}^n p(x_i)q(x_i)$$

bağıntısı bir iç çarpımdır.

- Sürekli fonksiyonlar uzayında  $C[a, b]$  tanımlanan

$$\langle f(x), g(x) \rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx$$

bağıntısı bir iç çarpım belirtir.

- Bir önceki maddeye benzer şekilde sürekli  $f(x), g(x)$  karmaşık değerli fonksiyonları için

$$\langle f(x), g(x) \rangle = \int_0^1 f(x)\overline{g(x)}dx$$

karmaşık fonksiyonlar uzayında bir iç çarpımdır.

- $A$  ve  $B$ , girdileri sırasıyla  $a_{ij}$  ve  $b_{ij}$  olan iki reel girdili  $m \times n$  tipinde matris olsun.

$$\langle A, B \rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ij}b_{ij}$$

bağıntısı  $\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$  uzayında bir iç çarpım belirtir.

- $\mathbb{R}^n$  uzayında, her  $1 \leq i \leq n$  için  $\lambda_i \geq 0$  bir reel sayı olmak üzere

$$\langle (x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i y_i$$

bağıntısı bir iç çarpımdır. Özel olarak her  $i$  için  $\lambda_i = 1$  seçilirse bu çarpım standart iç çarpıma dönüşür.

Şimdi vektörlerin dikliği üzerine birkaç tanım yapalım.

**Tanım.**  $V$  bir iç çarpım uzayı olsun. İki  $u, v \in V$  vektörüne **ortogonal** veya **dik** denir ancak ve ancak  $\langle u, v \rangle = 0$  oluyorsa.  $S \subseteq V$  bir altküme olsun.

$$S^\perp := \{v \in V : \forall u \in S (u \perp v)\}$$

olarak tanımlanan kümeye  $S$ 'nin **ortogonal tümleyeni** adı verilir.

Bu tanıma göre sıfır vektörü her vektöre diktir. Eğer  $S \subseteq V$  bir altkümeyse  $S^\perp$  kümesinin elemanları ile  $S$  kümesinin elemanlarının kesişmediğini seziyor olabilirsiniz. Haklısınız. Bu yaptığımız iç çarpım tanımı ve diklik tanımına göre bu iki küme yalnızca sıfır vektöründe kesişirler. Zira iki kümeden alacağımız sıfırdan farklı bir vektörün kendine dik olması pek akla hayale sığan bir şey değildir.  $x \in S \cap S^\perp$  olması demek, diklik tanımı gereği  $\langle x, x \rangle = 0$  olması demektir. Fakat bu, pozitif tanımlılık özelliğinden dolayı  $x = 0$  olması demektir. Böylece sıfırdan farklı iki vektörün dik olması, onların ayrık olması demektir. Ayrıca bu bağıntı simetriktir, zira  $\langle u, v \rangle = 0$  ise

$$0 = \bar{0} = \overline{\langle u, v \rangle} = \langle v, u \rangle$$

sağlanır.

**Önsav 4.2.1.**  $S \subseteq T$  ise  $T^\perp \subseteq S^\perp$  olur.

**Kanıt:** Herhangi bir  $x \in T^\perp$  alalım. Demek ki her  $y \in T$  için  $\langle x, y \rangle = 0$  olmalıdır. Fakat her  $z \in S$  için  $z \in T$  olduğundan her  $z \in S$  için  $\langle x, z \rangle = 0$  olmalıdır. Bu da  $x \in S^\perp$  demektir.  $\square$

İlginç bir şekilde  $S$  bir vektör uzayı olmasa bile  $S^\perp$  kümesi bir vektör uzayıdır. Bu ilginç sonuca bir göz atalım.

**Önsav 4.2.2.**  $V$  bir iç çarpım uzayı ve  $U$  onun bir altkümesi olsun. O halde  $U^\perp$  kümesi  $V$ 'nin bir altuzayıdır.

**Kanıt:**  $0 \in U^\perp$  olduğunu biliyoruz. Demek ki  $U^\perp \neq \emptyset$  imiş. Şimdi iki  $u_1, u_2 \in U^\perp$  alalım. Tanımdan ötürü her  $v \in U$  için  $\langle u_1, v \rangle = 0 = \langle u_2, v \rangle$  olmalıdır. Buradan yola çıkarak

$$\langle u_1 + u_2, v \rangle = \langle u_1, v \rangle + \langle u_2, v \rangle = 0 + 0 = 0$$

sonucuna varırız. Seçilen  $v$  vektörü keyfi olduğundan  $u_1 + u_2 \in U^\perp$  olmalıdır.

Şimdi herhangi bir  $\lambda$  skaleri alalım. Bu durumda her  $u \in U^\perp$  ve  $v \in V$  için

$$\langle \lambda u, v \rangle = \lambda \langle u, v \rangle = \lambda 0 = 0$$

eşitliği sağlandığından  $\lambda u \in U^\perp$  olur.  $\square$

Bir vektör uzayının ortogonal tümleyenini bulmak, biraz zor gözükebilir. Ancak, eğer vektör uzayının tabanını biliyorsak, o tabana ortogonal vektörler aynı zamanda uzaya da ortogondur. Bir sonraki önsav bu açıdan ölümcül bir öneme sahip.

**Önsav 4.2.3.**  $v$  bir iç çarpım uzayı ve  $S \subseteq V$  bir altküme olsun. Bu durumda

$$\langle S \rangle^\perp = \langle S^\perp \rangle = S^\perp$$

eşitliği sağlanır.

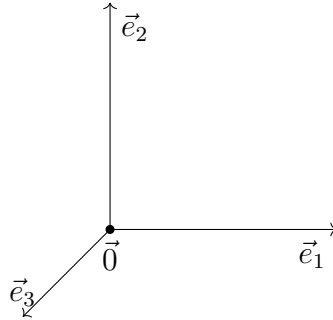
**Kanıt:**  $S = S^\perp$  eşitliğini Önsav 4.2.1'den biliyoruz.  $v \in \langle S \rangle^\perp$  olsun. O halde her  $u \in \langle S \rangle$  için  $\langle v, u \rangle = 0$  olmalı. Fakat  $S \subseteq \langle S \rangle$  olduğundan her  $w \in S$  için de  $\langle v, w \rangle = 0$  olmalı. Demek ki  $v \in S^\perp$  imiş. Bu da  $v \in S^\perp \subseteq \langle S^\perp \rangle$  demektir. Buradan  $\langle S \rangle^\perp \subseteq \langle S^\perp \rangle$  kapsamaları çıkar.

Şimdi tersine  $v \in \langle S^\perp \rangle$  olsun.  $u \in \langle S \rangle$  keyfi bir vektör olsun. Demek ki öyle  $w_1, \dots, w_n \in S$  vardır ki bazı  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  skalerleri için  $u = \alpha_1 w_1 + \dots + \alpha_n w_n$  olur.

$$\begin{aligned}
\langle u, v \rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^n \alpha_i w_i, v \right\rangle \\
&= \sum_{i=1}^n \langle \alpha_i w_i, v \rangle \\
&= \sum_{i=1}^n \alpha_i \langle w_i, v \rangle \\
&= \sum_{i=1}^n \alpha_i 0 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Bu hesaplama göre  $v \in \langle S \rangle^\perp$  olmalıdır. Demek ki  $\langle S^\perp \rangle \subseteq \langle S \rangle^\perp$  kapsamı geçerlidir. Çift taraflı kapsamadan ötürü kanıt tamamlanır.  $\square$

Bir  $X = \{v_1, \dots, v_n\}$  kümesi alalım.  $i \neq j$  olmak üzere eğer her  $1 \leq i, j \leq n$  için  $v_i \perp v_j$  oluyorsa  $X$  kümesine **ortogonal küme** veya **ortogonal sistem** denir. Ortogonal sistemler, birbirine dik vektörlerden oluşur.



Şekil 18: Ortogonal bir vektör sistemi

Sezgisel olarak ortogonal sistemlerin doğrusal bağımsız olduğunu düşünebiliriz. Nitekim öyledir de. Bunu yukarıdaki gibi üç vektör üzerinden düşünebilirsiniz.

**Önsav 4.2.4.**  $X = \{v_1, \dots, v_n\}$  sıfırdan farklı bir ortogonal sistem olsun. O halde  $X$  doğrusal bağımsızdır.

**Kanıt:**  $X$  kümesinin ortogonal olması demek,  $i \neq j$  olmak üzere her  $i, j$  indisi için  $\langle x_i, x_j \rangle = 0$  olması demektir. Bunu göz önünde bulundurarak

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i = 0$$

denkleminde bakalım. Bir  $1 \leq k \leq n$  sayısını sabitleyelim. Her iki taraftan  $v_k$  ile iç çarpım alalım:

$$\left\langle \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i, v_k \right\rangle = \langle 0, v_k \rangle.$$

Burada  $\langle 0, v_k \rangle = 0$  eşitliğini göz önünde bulundurarak

$$0 = \left\langle \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i, v_k \right\rangle = \sum_{i=1}^n \alpha_i \langle v_i, v_k \rangle = \alpha_k \langle v_k, v_k \rangle$$

hesabını yapabiliriz. Toplamdaki  $k \neq i$  için  $\langle v_i, v_k \rangle$  terimi sifıra eşit olduğundan elimizde yalnızca  $\langle v_k, v_k \rangle$  terimi kaldı. Fakat pozitif tanımlılıktan ve  $v_k \neq 0$  olduğundan

$$\langle v_k, v_k \rangle > 0$$

olmalıdır. Böylece  $\alpha_k \langle v_k, v_k \rangle = 0$  olabilmesi için gerek ve yeter şart  $\alpha_k = 0$  olmasıdır. Şimdi bunu her  $1 \leq k \leq n$  için düşünün. Demek ki her  $1 \leq k \leq n$  için  $\alpha_k = 0$  olmalıdır. Bu da doğrusal bağımsızlığı kanıtlar.  $\square$

**Sonuç 4.2.1.**  $n$  boyutlu bir uzayın  $n$  elemanlı her ortogonal sistemi bir taban oluşturur.

**Sonuç 4.2.2.** Doğrusal bağımlı bir sistem ortogonal olamaz.

**Önsav 4.2.5.**  $V$  sonlu boyutlu bir iç çarpım uzayı olsun ve  $U$  onun bir altuzayı olsun. Bu durumda aşağıdaki eşitlik sağlanır:

$$V = U \oplus U^\perp.$$

**Kanıt:**  $U \cap U^\perp = \{0\}$  olduğunu biliyoruz.  $V = U + U^\perp$  kısmını kanıtlayalım.  $V = U$  ise sıkıntı yok. Bu durumda  $U^\perp = \{0\}$  olur ve gerisi bariz.  $U \neq V$  olsun. Bir  $0 \neq u \in U$  alalım ve  $\varphi : V \rightarrow U$  dönüşümünü

$$\varphi(v) = \frac{\langle v, u \rangle}{\langle u, u \rangle} u$$

kuralı ile tanımlayalım. Bu bir doğrusal dönüşümdür (Gösterin). Bu dönüşümün çekirdeğine bakalım:

$$\ker \varphi = \{x \in V : \varphi(x) = 0\} = \{x \in V : \langle x, u \rangle = 0\} = U^\perp.$$

Şimdi örtenliği gösterelim.  $U$ 'nun bir  $e_1, \dots, e_k$  tabanını alalım. Demek ki her  $1 \leq i \leq k$  için  $\langle e_i, u \rangle \neq 0$ .  $\alpha_i$ 'ler skaler olmak üzere.

$$\sum_{i=1}^k \varphi(\alpha_i e_i) = 0$$

olsun. Bu durumda

$$\sum_{i=1}^k \varphi(\alpha_i e_i) = \frac{\langle \sum_{i=1}^k \alpha_i e_i, u \rangle}{\langle u, u \rangle} u = 0$$

olmalıdır. Sağdan ikinci eşitlikte  $\langle u, u \rangle$  terimini karşıya atarak

$$\left\langle \sum_{i=1}^k \alpha_i e_i, u \right\rangle u = 0$$

elde ederiz.  $u \neq 0$  olduğundan  $\langle \sum \alpha_i e_i, u \rangle = 0$  olmalıdır. Demek ki  $\sum \alpha_i e_i \in \ker \varphi = U^\perp$  olmalıymış. Fakat bu, aynı zamanda  $\sum \alpha_i e_i \in U$  olduğundan,  $\sum \alpha_i e_i = 0$  demektir. Sistem doğrusal bağımsız olduğundan her  $i$  için  $\alpha_i = 0$  olmalıdır. Demek ki görüntü kümesi en az  $k$  boyutluymuş. Görüntü kümesi  $U$ 'nun bir altuzayı olduğundan ve  $\dim(U) = k$  olduğundan görüntü  $U$  olmalıymış. Bu da örtenliği kanıtlar.

Tüm bu yaptıklarımızdan ve birinci izomorfizma teoreminden  $V/U^\perp \cong U$  olmalıdır. Buradan  $\dim(U) + \dim(U^\perp) = 0$  elde ederiz.  $U^\perp \subseteq \langle (V - U) \cup \{0\} \rangle$  olduğundan ve  $\dim(U^\perp) = \dim(\langle (V - U) \cup \{0\} \rangle)$  olduğundan  $U^\perp = \langle (V - U) \cup \{0\} \rangle$  olmalıdır. Bu da demek oluyor ki  $U + U^\perp = V$ .  $\square$

Bu önsavın bir önemli sonucu varsa o da sonlu boyutlu her iç çarpım uzayında her  $U$  altuzayı için  $U^\perp = (U^\perp)^\perp$  olmasıdır. Buradan;

$$U \oplus U^\perp = U^\perp \oplus (U^\perp)^\perp = V$$

elde ederiz. Bu demek oluyor ki eğer  $\{e_1, \dots, e_n\}$  kümesi  $V$ 'nin bir tabanı ve  $\{e_1, \dots, e_k\}$  kümesi  $U^\perp$  uzayının bir tabanı ise yukarıdaki eşitlikten ötürü  $\{e_{k+1}, \dots, e_n\}$  kümesi de aynı anda hem  $U$ 'nun hem de  $(U^\perp)^\perp$  uzayının bir tabanıdır. O halde  $U^\perp = (U^\perp)^\perp$ . Bunu bir önsav olarak yazalım.

**Önsav 4.2.6.**  $V$  sonlu boyutlu bir iç çarpım uzayı ve  $U$  onun bir altuzayı olsun. O halde

$$U = (U^\perp)^\perp$$

sağlanır.

Önsav 4.2.5'in bir diğer önemli sonucu ise iyi tanımlı yeni bir bağıntı veriyor olmasıdır.  $U$  kümesi,  $V$  iç çarpım uzayının bir alt uzayı olsun. Bu durumda her  $v \in V$  için öyle bir ve bir tek  $u \in U$ ,  $u' \in U^\perp$  vardır ki  $v = u + u'$  olur. O halde

$$\text{proj}_U(v) = u$$

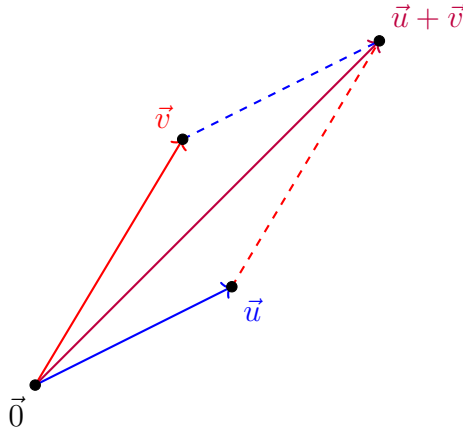
şeklinde tanımlanan  $\text{proj}_U : V \rightarrow U$  bağıntısı bir doğrusal dönüşümdür ve  $\text{proj}_U(v)$  vektörüne  $v$ 'nin  $U$  uzayı üzerine izdüşümü adı verilir.

### 4.3 Normlu Uzaylar

Normlu uzay kavramı, doğrudan metrik uzaylarla ilişkilidir. Metrikten kastımız, uzaklık ölçümü yapabildiğimiz uzaylardır. Metrik denen şeyin birkaç temel özelliği vardır. Bir  $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}^{\geq 0}$  fonksiyonu, aşağıdaki özellikleri her  $x, y, z \in M$  için sağlıyorsa metrik adını alır:

- Her  $x \in M$  için  $d(x, y) = 0 \iff x = y$ ,
- (Simetri)  $d(x, y) = d(y, x)$ ,
- (Üçgen Eşitsizliği)  $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ .

Baktığımız zaman bu özellikler gerçekten de temel metrik özellikleridir. Bir düşünün: Bir nokta her zaman kendisine sıfır uzaklıkta olmalıdır, öyle değil mi? Tersine, iki nokta sıfır uzaklıktaysa o iki nokta aslında eşittir. Bir  $A$  noktası ile  $B$  noktası arasındaki uzaklık,  $B$  noktası ile  $A$  noktası arasındaki uzaklığa eşit olmalıdır. Son olarak  $A$ 'dan  $B$ 'ye giden en kısa yol,  $A$ 'dan  $C$ 'ye ve  $C$ 'den  $B$ 'ye giden yoldan küçük eşit olmalıdır. Eşitlik durumunda ise  $C$  noktası,  $A - B$  yolunun üstünde olur.



Şekil 19: Üçgen eşitsizliği:  $\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$

Norm ise bir vektörün uzunluğunu ifade eder. Bu uzunluk, sıfırdan büyük bir reel sayı olmalı ve skalerle çarpmaya saygı duymalıdır.

Bir  $V$  uzayı için  $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}^{\geq 0}$  fonksiyonu;

- Her  $v \in V$  için  $\|v\| = 0 \iff v = 0$ ,
- Her  $v \in V$  ve  $\lambda \in \mathbb{C}$  için  $\|\lambda v\| = |\lambda| \cdot \|v\|$ ,
- Her  $v, u$  için  $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$

özelliklerini sağlıyorsa bu fonksiyona  $V$  üzerinde bir **norm** denir. İkinci özellikteki  $|\lambda|$  ifadesinin  $\lambda = a + bi$  için  $\sqrt{a^2 + b^2}$  ifadesine eşit olduğunu hatırlatalım. Eğer  $\lambda$  bir reel

sayı ise bu ifade mutlak değer fonksiyonuna eş değer olur. Üzerinde norm tanımlanan vektör uzaylarına **normlu uzay** adı verilir. Buradaki üçgen eşitsizliğinin başka bir temsili daha vardır. Normlu uzayda üçgen eşitsizliği şu şekildedir:

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \forall x, y.$$

Şimdi  $a, b$  için aşağıdakileri yazalım:

$$a = (a - b) + b,$$

buna üçgen eşitsizliğini uygulayalım:

$$\|a\| = \|(a - b) + b\| \leq \|a - b\| + \|b\|.$$

Böylece,

$$\|a\| - \|b\| \leq \|a - b\|.$$

Benzer şekilde,

$$b = (b - a) + a,$$

buradan da

$$\|b\| = \|(b - a) + a\| \leq \|b - a\| + \|a\| = \|a - b\| + \|a\|,$$

yani,

$$\|b\| - \|a\| \leq \|a - b\|.$$

Sonuç olarak,

$$-\|a - b\| \leq \|a\| - \|b\| \leq \|a - b\|,$$

ve bu da

$$\| \|a\| - \|b\| \| \leq \|a - b\|$$

eşitsizliğini verir. Bu koşulu ileriki konularda kullanacağız.

**Teorem 4.3.1** (Cauchy-Schwarz Eşitsizliği).  $V$  bir karmaşık iç çarpım uzayı olsun. Aşağıdaki eşitsizlik sağlanır.

$$|\langle x, y \rangle| \leq \sqrt{\langle x, x \rangle} \sqrt{\langle y, y \rangle}$$

*Eşitlik durumu yalnızca  $x$  ve  $y$  doğrusal bağımlıysa geçerli olur.*

**Kanıt:**  $x$  ve  $y$  doğrusal bağımsız olsunlar. Demek ki  $y \neq 0$  ve her  $c \in \mathbb{C}$  skaleri için  $x - cy \neq 0$  olur.  $c = \frac{\langle y, x \rangle}{\langle y, y \rangle}$  seçerek hesap yapmaya başlayalım:

$$\begin{aligned}
0 < \langle x - cy, x - cy \rangle &= \langle x, x - cy \rangle - \langle cy, x - cy \rangle \\
&= \langle x, x \rangle - \langle x, cy \rangle - \langle cy, x \rangle + \langle cy, cy \rangle \\
&= \langle x, x \rangle - \bar{c}\langle x, y \rangle - c\langle y, x \rangle + c\bar{c}\langle y, y \rangle \\
&= \langle x, x \rangle - \frac{\overline{\langle y, x \rangle}}{\langle y, y \rangle} \langle x, y \rangle - \frac{\langle y, x \rangle}{\langle y, y \rangle} \langle y, x \rangle + |c|^2 \langle y, y \rangle \\
&= \langle x, x \rangle - \frac{\langle x, y \rangle}{\langle y, y \rangle} \langle x, y \rangle - \frac{\langle y, x \rangle}{\langle y, y \rangle} \langle y, x \rangle + \frac{|\langle y, x \rangle|^2}{\langle y, y \rangle} \\
&= \langle x, x \rangle - \frac{|\langle y, x \rangle|^2}{\langle y, y \rangle}.
\end{aligned}$$

En sağ tarafa en sol tarafı birleştirerek eşitsizliği elde ederiz. Burada en az bir  $c \in \mathbb{C}$  için  $x - cy = 0$  olsaydı o halde eşitliğin sağlanacağına dikkat edin.  $\square$

Cauchy-Schwarz eşitsizliği, son derece temel bir eşitsizlik olup bir sonraki teoremin kanıtında önemli bir rol oynar.

**Önsav 4.3.1.**  $V$  bir karmaşık iç çarpım uzayı olsun. O halde

$$\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

tanımı bir norm belirtir.

**Kanıt:** Pozitiflikten ötürü  $\langle x, x \rangle$  ifadesinin sıfırdan büyük bir reel sayı olduğunu biliyoruz. O halde  $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} : V \rightarrow \mathbb{R}^{\geq 0}$  fonksiyonu iyi tanımlıdır. Norm özelliklerin sağlandığını gösterelim.

1.  $\langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$  özelliği, iç çarpımın tanımından geliyor. O halde ilk özellik bariz.
2. Herhangi bir  $\lambda$  karmaşık sayısı için

$$\|\lambda x\| = \sqrt{\langle \lambda x, \lambda x \rangle} = \sqrt{\lambda \bar{\lambda} \langle x, x \rangle} = \sqrt{|\lambda|^2 \langle x, x \rangle} = |\lambda| \sqrt{\langle x, x \rangle} = |\lambda| \|x\|$$

hesabını yapabiliriz. Bu durumda ikinci özellik de sağlanır.

3.  $x, y \in V$  için

$$\|x + y\|$$

ifadesini inceleyelim.

$$\begin{aligned}
\langle x + y, x + y \rangle &= \langle x, x + y \rangle + \langle y, x + y \rangle \\
&= \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle \\
&= \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \overline{\langle x, y \rangle} + \langle y, y \rangle \\
&= \langle x, x \rangle + 2 \operatorname{Re}(\langle x, y \rangle) + \langle y, y \rangle \\
&= \langle x, x \rangle + 2|\langle x, y \rangle| + \langle y, y \rangle \\
&\leq \langle x, x \rangle + 2\langle x, x \rangle \langle y, y \rangle + \langle y, y \rangle \\
&= (\langle x, x \rangle + \langle y, y \rangle)^2
\end{aligned}$$

Bu hesabı yaparken her  $a + bi$  karmaşık sayısı için  $\operatorname{Re}(a + bi) = a$  tanımını anımsatalım. Ayrıca eşitsizliğe geçerken Cauchy-Schwarz eşitsizliğini kullandık. En sol ve en sağ tarafın karekökü pozitif olduğundan her iki tarafın karekökünü alarak

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

eşitsizliğini elde ederiz.

Bu iç çarpım birlikte  $\langle x, x \rangle$  bir norm belirtir. □

Bir iç çarpım uzayında iç çarpım vasıtasıyla norm tanımlanmışsa Cauchy-Schwarz eşitsizliğini  $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$  olarak da ifade edebiliriz.

**Sonuç 4.3.1.** *Her karmaşık iç çarpım uzayı bir normlu uzaydır.*

Bu konunun başında normlu uzayların metrik uzaylarla doğrudan bir ilişkisi olduğunu söylemiştik. Şimdi buna bir anlam kazandırmanın vakti geldi.

**Teorem 4.3.2.** *Her normlu uzay bir metrik uzaydır.*

**Kanıt:**  $V$  bir normlu uzay olmak üzere  $d : V \times V \rightarrow \mathbb{R}^{\geq 0}$  fonksiyonunu

$$d(x, y) = \|x - y\|$$

kuralı ile tanımlayalım. Norm fonksiyonu sıfırdan büyük değerler aldığından bu fonksiyon iyi tanımlıdır. Ayrıca her  $x \in V$  için

$$d(x, x) = \|x - x\| = \|0\| = 0$$

olduğu bariz. Tersine,  $d(x, y) = 0$  olsun. O halde  $\|x - y\| = 0$  olacağından yine normlu uzayın özelliklerinden  $x = y$  çıkar. Şimdi ikinci özelliği gösterelim:

$$d(x, y) = \|x - y\| = \|(-1)(y - x)\| = |-1| \|y - x\| = \|y - x\| = d(y, x).$$

Simetri özelliğini de kolayca göstermiş olduk. Son olarak üçgen eşitsizliğine bakalım. Normların üçgen eşitsizliği ile bunu da rahatça yapabiliriz:

$$d(x, y) = \|x - y\| = \|x - z + z - y\| \leq \|x - z\| + \|z - y\| = d(x, z) + d(z, y).$$

Kanıt tamam. □

**Sonuç 4.3.2.** Her karmaşık iç çarpım uzayı bir metrik uzaydır.

İç çarpım uzayları ve metrik uzaylarla ilgili bir geçiş bulduk bulmasına ama acaba bunun tersi doğru mudur? Yani her metrik uzay bir normlu uzay mıdır? Ya da her normlu uzay bir iç çarpım uzayı mıdır? Bu genel olarak doğru değildir. Şimdi bazı normlu uzay örnekleri verelim. Örnek verirken bu geçişlere karşı örnek de vermiş olacağız.

- $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonu

$$\|(x_1, \dots, x_n)\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$$

kuralı ile bir norm belirler. Bu norma **Öklid normu** adı verilir.

- $\|\cdot\| : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonu

$$\|(x_1, \dots, x_n)\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2}$$

kuralı ile bir norm belirler.

- $f \in C[0, 1]$

$$\|f(x)\| = \sup_{x \in [0,1]} \{|f(x)|\}$$

kuralı bir norm belirtir.

- $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonu

$$\|(x_1, \dots, x_n)\| = \sum_{i=1}^n |x_i|$$

kuralı ile bir norm belirler. Fakat bu norm, bir iç çarpım uzayı değildir. Bunu ilerde kanıtlayacağız. Bu norm, **Manhattan normu** adını alır.

- $l^2 = \{(a_n)_{n \in \mathbb{N}} : \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n^2 \text{ yakınsak}\}$  tanımını yapalım. Bu küme,

$$\|\langle (a_n), (b_n) \rangle\| = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n \bar{b}_n$$

iç çarpımı ile bir normlu uzaydır.

- $C^k[a, b]$  kümesini, yani  $[a, b]$  aralığında  $k$  kere türevlenebilen karmaşık fonksiyonlar uzayını ele alalım.

$$\langle f, g \rangle := \sum_{i=0}^k \int_a^b \overline{f^{(i)}(x)} g^{(i)}(x) dx$$

tanımı bir iç çarpım verir.  $C^k[a, b]$  uzayı bu iç çarpıma göre bir normlu uzaydır.

**Teorem 4.3.3** (Paralelkenar Özdeşliği).  $V$  bir iç çarpım uzayı olsun. Her  $x, y \in V$  için

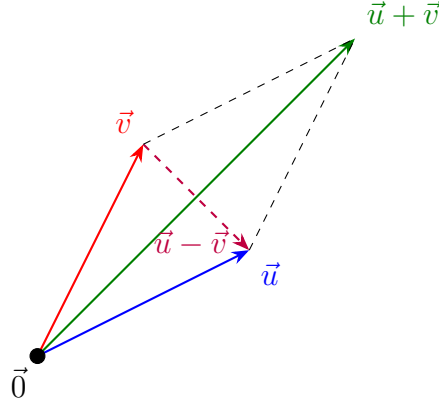
$$2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 = \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2$$

olur.

**Kanıt:** Keyfi  $x, y \in V$  vektörleri seçip hesaplamaya başlayalım.

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 &= \langle x + y, x + y \rangle + \langle x - y, x - y \rangle \\ &= \langle (x, x) + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle \rangle + (\langle x, x \rangle + \langle -y, x \rangle + \langle x, -y \rangle + \langle -y, -y \rangle) \\ &= (2\langle x, x \rangle + 2\langle y, y \rangle) + (\langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle -y, x \rangle + \langle x, -y \rangle) \\ &= (2\langle x, x \rangle + 2\langle y, y \rangle) + (\langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle - \langle y, x \rangle - \langle x, y \rangle) \\ &= 2\langle x, x \rangle + 2\langle y, y \rangle \\ &= 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2. \end{aligned}$$

Daha fazla söze gerek yok, kanıt burada biter. □



Şekil 20: Paralelkenar Kuralı ile Vektör Toplamı

Manhattan normuna geri dönelim. Bu norm Teorem 4.3.3'ü sağlamaz. Bir deneme yapmak adına  $x = (1, 1)$  ve  $y = (3, 2)$  seçelim. Bu durumda

$$2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 = 2(|1| + |1|)^2 + 2(|3| + |2|)^2 = 8 + 50 = 58$$

sonucunu buluruz. Öte yandan,  $\|x - y\|^2 + \|x + y\|^2 = \|(-2, -1)\|^2 + \|(4, 3)\|^2 = (|-2| + |-1|)^2 + (|4| + |3|)^2 = 9 + 25 = 34$  bulunur. İki sonuç birbirine eşit olmadığından Manhattan normu bir iç çarpım uzayı olamaz.

Pisagor teoremini bilirsiniz. Dik bir üçgende iki dik kenarın uzunlukları  $a$  ve  $b$  ise hipotenüsü  $c^2 = a^2 + b^2$  bağıntısıyla bulabiliyoruz. Biz norm ile birlikte vektör uzaylarında uzunluk kavramını biliyoruz. Ayrıca iç çarpım uzaylarında diklik kavramını da biliyoruz. Acaba diyorum, pisagor teoremi iki dik vektör için geçerli olabilir mi? Temel bir soru ve hemen yanıtını verelim.

**Teorem 4.3.4.**  $V$  bir iç çarpım uzayı ve  $\langle u, v \rangle = 0$  olsun. O halde

$$\|v\|^2 + \|u\|^2 = \|u + v\|^2$$

eşitliği sağlanır.

**Kanıt:**

$$\begin{aligned} \|u + v\|^2 &= \langle u + v, u + v \rangle \\ &= \langle u, u \rangle + \langle u, v \rangle + \langle v, u \rangle + \langle v, v \rangle \\ &= \langle u, u \rangle + 0 + \bar{0} + \langle v, v \rangle \\ &= \|u\|^2 + \|v\|^2. \end{aligned}$$

Fazla söze gerek yok, kanıt bu kadar.  $\square$

**Tanım.**  $V$  bir normlu uzay ve  $u \in V$  olsun. Eğer  $\|u\| = 1$  özelliği sağlanıyorsa  $u$ 'ya **birim vektör adı** verilir.

**Önsav 4.3.2.** Sıfırdan farklı bir  $u$  vektörü için

$$\frac{u}{\|u\|}$$

bir birim vektördür.

**Kanıt:**  $u$  vektörü sıfırdan farklı olduğu için  $\frac{1}{\|u\|}$  sayısı mevcuttur.

$$\left\| \frac{u}{\|u\|} \right\| = \frac{1}{\|u\|} \|u\| = 1$$

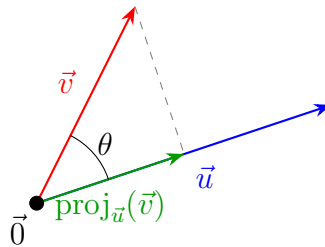
hesabından istediğimiz direkt çıkar.  $\square$

**Sonuç 4.3.3.** Herhangi bir  $\lambda \in \mathbb{R}^{\geq 0}$  uzunluğunda ve  $u \in \mathbb{R}^n$  vektörü ile aynı doğrultuya sahip bir vektörü

$$\frac{\lambda}{\|u\|} u$$

şeklinde yazabiliriz.

Bu sonuç sayesinde bir vektörün diğerine izdüşümünü yazabiliriz. Tek yapmamız gereken izdüşüm vektörünün uzunluğunu bulmak, sonrasında onu diğer vektörün birim hali ile çarparak izdüşümünü bulabiliriz. Şekil 21'den takip edin.



Şekil 21: İzdüşüm

Diyelim ki bir  $v$  vektörünün  $u$  vektörüne izdüşümünü arıyoruz. Bu vektörü  $\text{proj}_u v$  olarak işaretleyelim. Aradaki açının kosinüsü

$$\frac{\langle u, v \rangle}{\|v\| \|u\|}$$

olarak bulunabilir. Böylece

$$\frac{\langle u, v \rangle}{\|v\| \|u\|} = \cos \theta = \frac{\|\text{proj}_u v\|}{\|v\|}$$

bağıntısını elde ederiz. Buradan da

$$\|\text{proj}_u v\| = \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\|}$$

elde ederiz. Şimdi  $u$  doğrultusunda Sonuç 4.3.3'ü uygulayarak:

$$\text{proj}_u v = \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\|^2} u = \frac{\langle u, v \rangle}{\langle u, u \rangle} u$$

elde ederiz. Eğer  $v$  vektöründen izdüşüm vektörünü çıkarırsak  $u$  vektörüne dik bir vektör elde ederiz. Bunun için iç çarpımlarının sıfır olduğunu göstermek yeterli:

$$\begin{aligned} \langle u, v - \text{proj}_u v \rangle &= \langle u, v \rangle - \langle u, \text{proj}_u v \rangle \\ &= \langle u, v \rangle - \langle u, \frac{\langle u, v \rangle}{\langle u, u \rangle} u \rangle \\ &= \langle u, v \rangle - \frac{\langle u, v \rangle}{\langle u, u \rangle} \langle u, u \rangle \\ &= \langle u, v \rangle - \langle u, v \rangle \\ &= 0. \end{aligned}$$

Böylece sıfırdan farklı herhangi iki vektör ile ortogonal vektörler elde edebiliriz. Ayrıca ortogonal sistemlerin doğrusal bağımsız olduğunu biliyoruz, yani  $n$  boyutlu bir uzayda  $n$  adet ortogonal vektör bulabilirsek bir taban elde ederiz. Hatta bu tabanın elemanları birbirine dik olur. Daha da iyisi, bu vektörleri birimleştirerek her birinin birim vektör olmasını sağlayabiliriz. Ortogonal birim vektörlerden oluşan bir sisteme **ortonormal sistem** adı verilir. Bir sonraki sonuç 2 boyutlu bir uzayda ortonormal bir sistem oluşturmayı gösterir.

**Sonuç 4.3.4.** *Sıfırdan farklı  $u, v$  vektörleri için*

$$\begin{aligned} e_1 &= \frac{u}{\|u\|} \\ e_2 &= \frac{e_1 - \langle v, e_1 \rangle e_1}{\|e_1 - \langle v, e_1 \rangle e_1\|} \end{aligned}$$

*vektörleri, bir ortonormal taban oluşturur.*

Bunu  $n$  vektöre genelleyebiliriz. Bu süreç, herhangi bir tabanı ortonormal tabana dönüştürür ve **Gram-Schmidt Ortonormalleştirme** adını alır.

**Teorem 4.3.5** (Gram-Schmidt Prosedürü).  $V$  bir iç çarpım uzayı olsun ve  $\{e_1, \dots, e_n\}$  kümesi bu uzayın herhangi bir tabanı olsun.

$$v_1 := \frac{e_1}{\|e_1\|},$$

$$v_n := \frac{v_n - \sum_{i=1}^{n-1} \langle v_n, e_i \rangle e_i}{\|v_n - \sum_{i=1}^{n-1} \langle v_n, e_i \rangle e_i\|}$$

tanımı ile birlikte  $\{v_1, \dots, v_n\}$  kümesi  $V$  uzayının bir ortonormal tabanıdır.

**Kanıt:** Sonuç 4.3.4'ten tümevarımla çıkar. □

**Önsav 4.3.3.**  $V$  bir iç çarpım uzayı ve  $e_1, \dots, e_n$  ortonormal bir taban olsun. O halde her  $v \in V$  için

$$v = \sum_{i=1}^n \langle v, e_i \rangle e_i$$

olur.

**Kanıt:** Her  $0 \leq i, j \leq n$  için  $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{i,j}$  olduğunu not edelim. Zira eğer  $i \neq j$  ise  $e_i$  ile  $e_j$  ortogonal, eğer  $i = j$  ise ortonormallikten  $\langle e_i, e_i \rangle = 1$  olmalıdır.  $a_i$  skalerleri için

$$v = \sum_{i=1}^n a_i e_i$$

olsun. Herhangi bir  $j$  için her iki tarafta  $e_j$  ile iç çarpım alarak:

$$\langle v, e_j \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n a_i e_i, e_j \right\rangle = \sum_{i=1}^n a_i \langle e_i, e_j \rangle = \sum_{i=1}^n a_i \delta_{i,j} = a_j$$

elde ederiz. Her  $i$  için  $a_i$  katsayıları yerine  $\langle v, e_i \rangle$  yazarak bu önsavın kanıtını bitirebiliriz. □

**Teorem 4.3.6** (Parseval Eşitliği).  $e_1, \dots, e_n$  ortonormal bir taban ve  $v$  bu taban tarafından üretilen herhangi bir vektör olsun. O halde

$$\|v\|^2 = \sum_{i=1}^n |\langle v, e_i \rangle|^2$$

eşitliği sağlanır.

**Kanıt:** Önsav 4.3.3 ve Pisagor Teoreminin (bkz. Teorem 4.3.4) direkt bir sonucudur. □

**Teorem 4.3.7** (Bessel Eşitsizliği).  $V$  bir iç çarpım uzayı ve  $\{v_1, \dots, v_n\}$  ortonormal bir sistem olsun. Her  $v \in V$  için

$$\sum_{i=1}^n |\langle v, e_i \rangle|^2 \leq \|v\|^2$$

eşitsizliği sağlanır.

**Kanıt:** Norm fonksiyonunun sıfırdan büyük değerler aldığını biliyoruz. Temel iç çarpım fonksiyonu özelliklerini kullanarak

$$\begin{aligned} 0 &\leq \|v - \sum_{i=1}^n \langle v, v_i \rangle v_i\|^2 \\ &= \|v\|^2 - 2 \sum_{i=1}^n \operatorname{Re} \langle v, \langle v, v_i \rangle v_i \rangle + \sum_{i=1}^n |\langle v, v_i \rangle|^2 \\ &= \|v\|^2 - 2 \sum_{i=1}^n \operatorname{Re} |\langle v, v_i \rangle|^2 + \sum_{i=1}^n |\langle v, v_i \rangle|^2 \\ &= \|v\|^2 - \sum_{i=1}^n |\langle v, v_i \rangle|^2 \end{aligned}$$

elde ederiz. En sağ tarafı en sol tarafa geçirerek istediğimizi elde ederiz.  $\square$

Eğer  $V$  sonlu boyutlu değilse her iki tarafta  $n$  sonsuza giderken limit alarak

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\langle v, e_i \rangle|^2 \leq \|v\|^2$$

sonucunu buluruz, bu da  $\sum_{i=1}^n |\langle v, e_i \rangle|^2$  serisinin yakınsadığı anlamına gelir.

**Teorem 4.3.8.** (Optimizasyon Problemi) Bir  $V$  iç çarpım uzayı alalım ve  $u \in V$  sıfırdan farklı olsun. Bu durumda her  $v \in V$  için

$$\|v - \operatorname{proj}_u v\| \leq \|v - u\|$$

sağlanır. Ancak ve ancak  $u = \operatorname{proj}_u v$  olursa eşitlik sağlanır.

**Kanıt:** Sıfırdan farklı bir  $u$  sabitleyelim.  $v - \operatorname{proj}_u v$  ve  $\|\operatorname{proj}_u v - u\|$  vektörlerinin ortogonalliğinden

$$\|v - \operatorname{proj}_u v\|^2 \leq \|v - \operatorname{proj}_u v\|^2 + \|\operatorname{proj}_u v - u\|^2 = \|v - \operatorname{proj}_u v + \operatorname{proj}_u v - u\| = \|v - u\|$$

bağıntısını elde ederiz. Bu da teoremin ilk yarısını kanıtlar. İkinci yarısı için

$$\|v - \operatorname{proj}_u v\| = \|v - u\|$$

varsayımını yapalım. O halde daha önce elde ettiğimiz

$$\|v - \operatorname{proj}_u v\|^2 + \|\operatorname{proj}_u v - u\|^2 = \|v - u\|^2$$

bağıntısından  $\|\operatorname{proj}_u v - u\|^2 = 0$  elde ederiz. Bu da ancak ve ancak  $\operatorname{proj}_u v = u$  ise sağlanır.  $\square$

Peki bu teorem bize nasıl bir optimizasyon veriyor? Bunu biraz düşünelim. Eminim ki Maclaurin serilerini daha önce duymuşsunuzdur: Trigonometrik  $\sin x$  ve  $\cos x$  gibi fonksiyonlara polinom halinde yaklaşımda önemli bir tekniktir fakat tek değildir. Şimdi buna benzer bir uygulama yapacağız:  $\sin x$  fonksiyonuna polinomlarla yaklaşmayı deneyelim. Öncelikle bir derece belirleyelim. Beşinci dereceden polinomlarla  $\sin x$ 'e en yakın polinomu  $C[-\pi, \pi]$  uzayında bulmaya çalışıyoruz. İç çarpımımız ise

$$\int_0^\pi f(x)g(x)dx$$

şeklinde verilmiş olsun. Beşinci dereceden polinomlar için  $1, x, x^2, x^3, x^4, x^5$  tabanından bahsedebiliriz. Bu tabanı ortonormalleştirelim.

$$e_1 = \frac{1}{\|1\|}$$

seçebiliriz. Paydadaki norm tahmin ettiğimiz gibi olmayabilir, hesap yapalım:

$$\|1\| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} dx} = \sqrt{2\pi}.$$

O halde  $e_1 = \frac{\sqrt{2\pi}}{2\pi}$  olmalıymış.

Teorem 4.3.5'i kullanarak ikinci vektörü hesaplayalım.

$$e_2 = \frac{x - \langle e_1, x \rangle e_1}{\|x - \langle e_1, x \rangle e_1\|}$$

hesabını yapmamız gerek. Bu oldukça uzun süren bir işlem olduğundan bilgisayar kodu yardımıyla bütün bu vektörleri hesaplayabiliriz. Sonuç şu şekilde:

$$\begin{aligned} e_1 &= \frac{\sqrt{2\pi}}{2\pi} \\ e_2 &= \frac{\sqrt{6}x}{2\sqrt{\pi^3}} \\ e_3 &= 3\sqrt{10} \left( \frac{x^2 - \frac{\pi^2}{3}}{4\sqrt{\pi^5}} \right) \\ e_4 &= 5\sqrt{14} \left( \frac{x^3 - 3\pi^2 \frac{x}{5}}{4\sqrt{\pi^7}} \right) \\ e_5 &= 105\sqrt{2} \left( \frac{x^4 - 6\pi^2 \left( \frac{x^2 - \frac{\pi^2}{3}}{7} \right)}{16\sqrt{\pi^9}} \right) \\ e_5 &= 63\sqrt{22} \left( \frac{x^5 - 3\pi^4 \left( \frac{x}{7} \right) - 10\pi^2 \left( \frac{x^3 - 3\pi^2 \left( \frac{x}{5} \right)}{9} \right)}{16\sqrt{\pi^9}} \right) \end{aligned}$$

Evet! İşte gördüğünüz gibi. Bu kadarını elle hesaplamak çok zor olurdu. Peki aradığımız yaklaşımı nasıl bulacağız? Teorem 4.3.8'i kullanarak  $\sin x$  fonksiyonunun

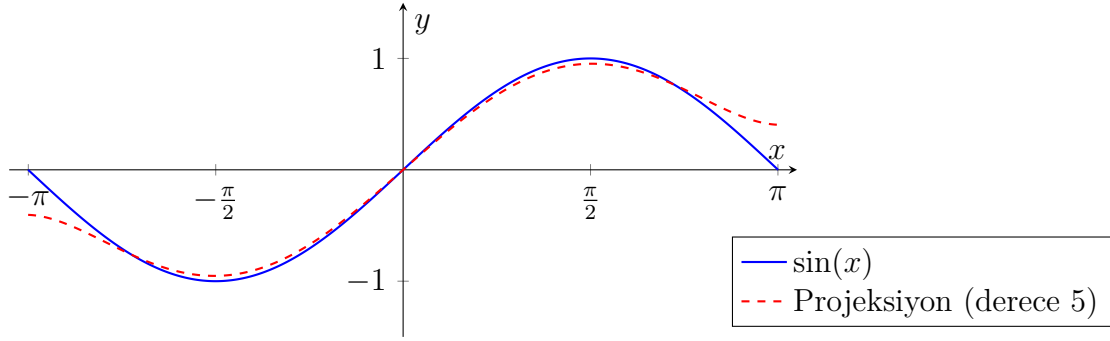
beşinci dereceden polinomlara en düşük normlu izdüşümünün dik olan olduğunu anlarız. Yani  $U = \langle 1, x, x^2, x^3, x^4, x^5 \rangle$  için  $\text{proj}_U(\sin x)$  vektörünü bulmamız gerek. Bunu da

$$\text{proj}_U(\sin x) = \sum_{i=0}^5 \langle \sin x, e_i \rangle e_i$$

ile bulabiliriz. Bunu da elle yapmak oldukça zor olacak. Bilgisayara yaptırdığımızda:

$$\begin{aligned} \text{proj}_U(\sin x) = & \frac{\sqrt{14}x(5x^2 - 3\pi^2)}{4\pi^{7/2}} \left( \frac{-\sqrt{14}(-2\pi^3 + 30\pi) + \sqrt{14}(-30\pi + 2\pi^3)}{4\pi^{7/2}} \right) \\ & + \frac{\sqrt{22}x(63x^4 - 70\pi^2x^2 + 15\pi^4)}{16\pi^{11/2}} \\ & \cdot \left( \frac{-\sqrt{22}(-7560\pi - 8\pi^5 + 840\pi^3) + \sqrt{22}(-840\pi^3 + 8\pi^5 + 7560\pi)}{16\pi^{11/2}} \right) \\ & + \frac{3x}{\pi^2} \end{aligned}$$

polinomunu elde ederiz.



Şekil 22:  $\sin x$  ile izdüşüm polinomunun karşılaştırılması

Görüldüğü üzere yeni polinom  $\sin x$ 'e oldukça yakın. Bu hesaplamaları yapmakta kullandığım python kodunu aşağıda bulabilirsiniz:

```

1
2 import sympy as sp
3 import numpy as np
4 import matplotlib.pyplot as plt
5
6 # Sembol ve iç içarpm ıtanm
7 x = sp.Symbol('x')
8 interval = (-sp.pi, sp.pi)
9
10 def inner(f, g):
11     return sp.integrate(f * g, (x, *interval))

```

```

12
13 # Gram-Schmidt ile ortonormalleştirme
14 def gram_schmidt(polynomials):
15     ortonormal_basis = []
16
17     pzero = polynomials[0]
18     frvec = pzero / sp.sqrt(inner(pzero, pzero))
19
20     ortonormal_basis.append(frvec)
21     polynomials.remove(pzero)
22
23     for p in polynomials:
24         # Ortogonal yap
25         sum = 0
26         for q in ortonormal_basis:
27             proj = inner(p, q) * q
28             sum += proj
29         p = p - sum
30         # Normla
31         norm = sp.sqrt(inner(p, p))
32         if norm != 0:
33             p = p / norm
34             ortonormal_basis.append(sp.simplify(p))
35     return ortonormal_basis
36
37 # 1Balangç vektörleri
38 basis = [1,x,x**2,x**3,x**4,x**5]
39
40 # İşlem
41 orthonormal_polys = gram_schmidt(basis)
42
43 # 1Yazdır
44 for i, poly in enumerate(orthonormal_polys):
45     print(f"_{i}(x) =", poly)
46
47 f = sp.sin(x)
48 projection = 0
49 for phi in orthonormal_polys:
50     coeff = inner(f, phi)
51     projection += coeff * phi
52
53 # 1Sonuçlar yazdır
54 print(projection)
55
56
57 f_lambdified = sp.lambdify(x, f, 'numpy')
58 proj_lambdified = sp.lambdify(x, projection, 'numpy')
59
60 # 1Aralık ve ğdeerler
61 x_vals = np.linspace(-np.pi, np.pi, 500)
62 f_vals = f_lambdified(x_vals)
63 proj_vals = proj_lambdified(x_vals)

```

```

64
65 # Grafik
66 plt.plot(x_vals, f_vals, label='sin(x)')
67 plt.plot(x_vals, proj_vals, '--', label='Projeksiyon')
68 plt.title('sin(x) ve Polinom 1Uzay Projeksiyonu')
69 plt.grid()
70 plt.legend()
71 plt.show()

```

Listing 1: Ortonormal Polinomlarla sin(x) Yaklaşımı

**Teorem 4.3.9** (Riesz Temsil Teoremi).  $V$  sonlu boyutlu bir iç çarpım uzayı olsun. Her  $\varphi \in V^*$  için öyle bir ve bir tek  $v \in V$  vardır ki

$$\varphi(u) = \langle u, v \rangle$$

olur.

**Kanıt:** Önce varlığı göstereceğiz. Teorem 4.3.4'ü kullanarak  $V$ 'nin bir ortonormal  $e_1, \dots, e_n$  tabanını alabiliriz. Her  $u \in V$  için

$$\begin{aligned}
\varphi(u) &= \varphi\left(\sum_{i=1}^n \langle u, e_i \rangle e_i\right) \\
&= \sum_{i=1}^n \langle u, e_i \rangle \varphi(e_i) \\
&= \langle u, \sum_{i=1}^n \overline{\varphi(e_i)} e_i \rangle
\end{aligned}$$

elde ederiz. Demek ki  $v = \sum_{i=1}^n \overline{\varphi(e_i)} e_i$  almak, teoremin varlık kısmını kanıtlar. Şimdi teklife bakalım. Diyelim belli  $v_1, v_2 \in V$  ve her  $u \in V$  için

$$\langle u, v_1 \rangle = \langle u, v_2 \rangle$$

sağlanıyor. O halde  $u = v_1 - v_2$  seçerek

$$\langle v_1 - v_2, v_1 \rangle = \langle v_1 - v_2, v_2 \rangle \iff \langle v_1 - v_2, v_1 \rangle - \langle v_1 - v_2, v_2 \rangle = 0 \iff \langle v_1 - v_2, v_1 - v_2 \rangle = 0$$

elde ederiz. Bu da ancak  $v_2 - v_1 = 0$  iken doğru olur. Demek ki  $v_1 = v_2$ .  $\square$

## 4.4 İç Çarpım Uzaylarında Diziler

Sayı dizilerini az çok biliyorsunuzdur. Bu bölümde vektör dizilerini göreceğiz. Dizi kavramına tamamen yabancıysanız bile merak etmeyin, onu da açıklayacağız. Bir diziyi yan yana sıralanmış bir vektör topluluğu gibi düşünebilirsiniz. Örneğin,  $\mathbb{R}^2$  uzayında bir dizi yazalım:

$$(0, 1), (0, 2), (0, 3), (0, 4), (0, 5), (0, 6), \dots$$

Burada bir diziyi, dizinin elemanlarını yan yana sıralayarak ifade ettik. Bir dizinin bir kümeden farklı dizilerdeki elemanların bir sırası olmasıdır. Örneğin bir diziyi  $a$  ismini verelim. Dizinin birinci terimini  $a_1$ , ikinci terimini  $a_2$ , üçüncü terimini  $a_3$ , bir  $k$  doğal sayısı için  $k$ 'inci terimini  $a_k$  ile gösteririz. Genel olarak bir diziyi

$$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, \dots$$

olarak ifade edebiliriz. Fakat her ne kadar sezgisel olarak güzel bir fikir verse de elemanları sırayla yazmak pratik bir kullanım değildir. Doğal sayıları ifade etmek için her seferinde  $\{0, 1, 2, \dots\}$  diye yazmayı  $\mathbb{N}$  gibi evrensel bir ifade kullanıyorsak, diziler için de  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ifadesini kullanacağız. Bunun yerine kısaca  $(a_n)$  yazabiliriz.

**Tanım.**  $V$  bir vektör uzay olsun. Bir  $a : \mathbb{N} \rightarrow V$  fonksiyonuna  $V$  üzerinde bir **dizi** denir ve  $a(n) = a_n$  olarak gösterilir.

Bizi asıl ilgilendiren mevzu ise dizilerin yakınsaklığıdır. Yakınsaklık, limit kavramının ta kendisidir. O yüzden bu limit kavramını anlamak gerekiyor. Bir dizinin limiti ne demek? Bunu uzunca açıklayacağız. Bunun için klasik bir örnek verelim:  $a_n = \frac{1}{n}$  dizisi. Bir gözlem yapalım, dizinin ilk birkaç terimine bakalım:

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \dots$$

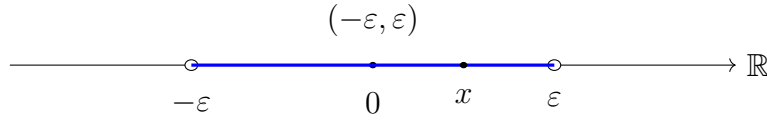
Öncelikle  $n$  ne olursa olsun dizideki  $\frac{1}{n}$  ifadeleri her zaman pozitif olmalıdır. Bu konuda anlaşalım. Fakat aynı zamanda dizinin elemanları bir küçülme halinde. Bunu görmek için ilerleyen terimleri inceleyelim:

$$a_{100} = \frac{1}{100} = 0.01, \quad a_{1000} = \frac{1}{1000} = 0.001, \quad a_{10000} = \frac{1}{10000} = 0.0001$$

Dizinin terimleri ilerledikçe, dizinin değeri küçülüyor. Bunu teoride şöyle kanıtlayabiliriz:

$$n < m \iff \frac{1}{m} < \frac{1}{n} \iff a_m < a_n.$$

Bu dizinin tüm terimleri pozitif ve terimleri sürekli küçülüyor. Belli ki dizi sıfırdan aşağı inemez ama sıfır da olamaz. Peki ne yapabilir? Sıfıra yaklaşabilir. Dizinin yaptığı şey sıfıra yaklaşmak. Her bir terimde sıfıra bir adım daha yaklaşıyoruz. Hiçbir terim sıfıra asla eşit olmayacak, önemli değil, dizinin terimleri ile sıfır arasındaki mesafenin her daim azalıyor olması. Bu yaklaşma işini biraz teknik bir hale getirelim.



Şekil 23: Sıfıra yeterince yakın bir aralık

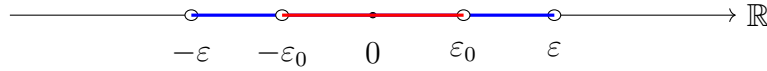
Şekil 22'yi inceleyin. Buradaki  $\varepsilon$  sayısı tamamen keyfi bir değer olsun. Örneğin,  $\varepsilon = 10^{-1000000000000000}$  alabiliriz. Yeterince küçük bir sayı, öyle değil mi? Bu aralığın içinde bir  $x$  noktası işaretleyelim. Bu  $x$  noktası için, sıfıra en fazla  $\varepsilon$  kadar yakın diyebiliriz. Yani, sıfır ile  $x$  noktaları arasındaki mesafenin  $\varepsilon$  değerinden daha küçük olduğunu söyleyebiliriz:

$$|x - 0| < \varepsilon.$$

Eğer dizinin elemanları bu kümenin içindeyse, yani bir yerden sonra

$$|a_n - 0| < \varepsilon$$

sağlanıyorsa sıkıntı yok, dizinin sıfıra yaklaştığını söyleyebiliriz. Fakat bu yeterli değil. Bir yerden sonra dizinin  $\varepsilon_0 = 2485^{-1000000000000000}$  değerinden de küçük olması lazım. Eğer dizinin hiçbir terimiyle sıfır arasındaki mesafe  $\varepsilon_0$  değerinden küçük olmasaydı dizinin sıfıra yaklaştığını söyleyemeyiz. Belki senin ya da benim için yeterince küçüktür, ama bir başkası için yeterli olmayabilir. Belki de boyutu  $\varepsilon_0$  değerinden küçük bir takım yaratıklar matematik yapıyordur, belki de bu mesafe onlar için oldukça büyüktür. Yani demem o ki  $\varepsilon$  değeri ne olursa olsun dizinin bir yerden sonraki terimleri ile sıfır arasındaki mesafe o değerden küçük olabilsin ki dizinin sıfıra yaklaştığını söyleyebilelim.



Şekil 24: Sıfıra daha da yakın bir aralık

Yani her  $\varepsilon > 0$  için bir  $N \in \mathbb{N}$  vardır öyle ki her  $n > N$  için

$$|a_n - 0| = |a_n| < \varepsilon$$

olmalı. Normlu uzaylarda mesafe kavramı olduğunu biliyoruz, demek ki yaklaşma kavramı da olmalı. Yukarıda yaptıklarımızı motivasyon kabul ederek yeni bir tanım yapalım.

**Tanım.**  $V$  bir normlu uzay olsun ve  $a \in V$  olsun.  $(a_n)$  ise  $V$  üzerinde bir dizi olsun. Eğer her  $\varepsilon > 0$  için öyle bir  $N \in \mathbb{N}$  bulabiliyorsak, öyle ki her  $n > N$  indisi için

$$\|a_n - a\| < \varepsilon$$

oluyorsa,  $(a_n)$  dizisinin  $a$ 'ya yakınsadığı söylenir. Bunu kısaca

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$$

ile gösteririz. Bir limite yakınsayan dizilere **yakınsak dizi** adı verilir. Yakınsak olmayan dizilere **ıraksak dizi** denir ve dizinin ıraksadığı söylenir.

Dizilerin yakınsaklıklarının normdan norma değiştiğini belirtmek isterim. Bir norm ile bir dizinin yakınsaklığı hesaplanabiliyorken başka bir normda aynı dizi yakınsak olmayabilir. Örneğin  $C[0, 1]$  uzayında integral normu ile

$$\|f(x)\|_\infty = \sup\{|f(x)|\}$$

şeklinde tanımlanan normu düşünelim.  $a_n = x^{-n}$  dizisini tanımlayalım. Bir  $\varepsilon > 0$  seçelim. İntegral normuna göre hesap yaparsak;

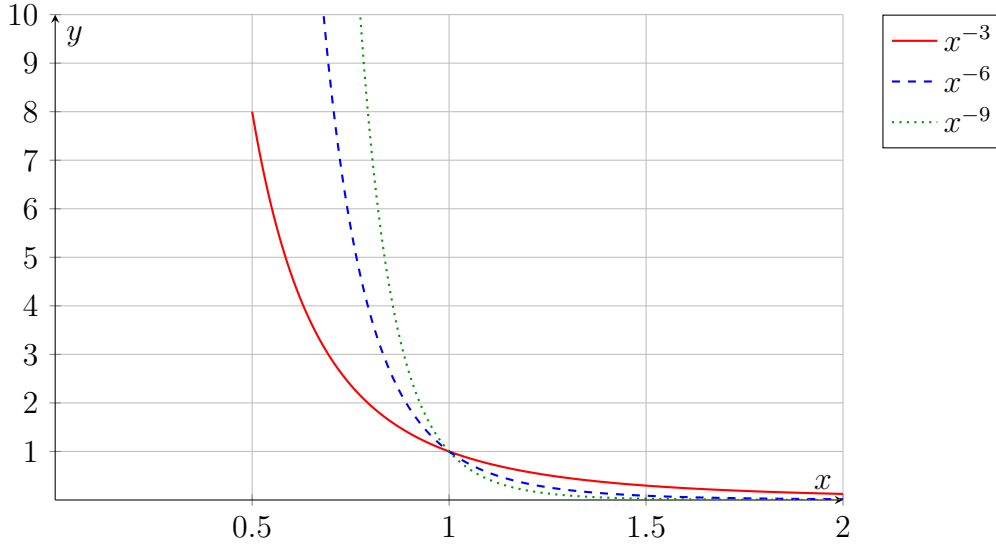
$$\|a_n - 0\| = \int_0^1 x^{-n} = \left| \frac{x^{-n+1}}{-n+1} \right|_0^1 = \frac{1^{1-n}}{1-n} = \frac{1}{n-1}$$

elde ederiz. Doğal sayıların yapısı gereği  $\varepsilon N > 1$  olacak şekilde bir  $N \in \mathbb{N}$  bulabiliriz. Daha doğrusu,  $\frac{1}{\varepsilon} < N$  olacak şekilde bir  $N$  doğal sayısı seçebiliriz. Zira  $\frac{1}{\varepsilon}$  değeri sonlu bir değerdir fakat doğal sayılar kümesi sonsuza kadar büyüyebilir. Bu durumda  $\frac{1}{N} < \varepsilon$  olur. Bu durumda her  $n > N + 1$  için

$$\|a_n - 0\| = \left| \frac{1}{n-1} \right| < \left| \frac{1}{N} \right| < \varepsilon$$

elde ederiz. Bu da  $(a_n)$  dizisinin sıfıra yakınsadığı anlamına gelir. Fakat  $\|\cdot\|_\infty$  normuna göre hesap yaparsak her  $n$  doğal sayısı için

$$\|a_n - 0\|_\infty = \|x^{-n}\|_\infty = \sup_{x \in [0,1]} \{|x^{-n}|\} = \infty$$



Şekil 25:  $a_n = x^{-n}$  dizisinin bazı terimleri ( $\sup_{x \in [0,1]} \{x^{-n}\} = \infty$ )

Demek ki integral normuna göre dizi sıfıra yakınsıyorken aynı dizi supremum normuna göre ıraksıyor. Dizi aynı dizi, vektör uzayı aynı uzay, değişen tek şey norm.

Normlu uzaylarda yalnızca bir limit vardır. Yani dizinin iki değere birden yakınsadığından bahsedemeyiz. Bu olgunun bir kanıtını yapalım.

**Önsav 4.4.1.** *Bir  $V$  normlu uzayında her yakınsak dizinin tek bir limiti vardır.*

Kanıt yaparken önemli bir mevzuyu göz önünde bulunduralım. Eğer her  $\varepsilon > 0$  için sağlanan bir özellikten bahsediyorsak, o zaman bu özelliğin  $\frac{\varepsilon}{2} > 0$  için de bahsedebiliriz. Bunu yakınsak dizi tanımlarının bir çoğunda kullanacağız.

**Kanıt:**  $(a_n)$  dizisinin  $V$  uzayında hem  $a \in V$  hem de  $b \in V$  değerine yakınsadığını varsayalım ve  $a \neq b$  olsun. O halde her  $\varepsilon > 0$  için öyle bir  $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$  vardır ki her  $n > N_1$  için  $\|a_n - a\| < \varepsilon/2$  ve her  $n > N_2$  için  $\|a_n - b\| < \varepsilon/2$  olur. Buraya kadar yalnızca tanımları yazdık. İstersek özel olarak  $\varepsilon = \|a - b\|$  seçebiliriz, böylece

$$\|a - b\| = \|a - a_n + a_n - b\| \leq \|a - a_n\| + \|a_n - b\| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon = \|a - b\|$$

elde ederiz. Fakat bu bize  $\|a - b\| < \|a - b\|$  çelişkisini verir. Bu da  $a - b \neq 0$ , yani  $\|a - b\| \neq 0$  varsayımından kaynaklanmaktadır. Dolayısıyla  $a = b$  olmalı.  $\square$

Böylece  $\lim_{x \rightarrow \infty} a_n = a$  yazımının bir anlamı olur, zira bu yazım artık yakınsak dizilerden vektörlere iyi tanımlı bir bağıntı yazmış olur. Şimdi bazı temel özelliklere göz atalım.

**Önsav 4.4.2.**  *$V$  bir normlu uzay olsun ve  $V$ 'nin belli bir normu üzerinde yakınsak iki  $(a_n), (b_n)$  dizisi alalım. Aşağıdaki özellikler sağlanır,*

i. *Bir  $\lambda$  skaleri için  $\lim_{x \rightarrow \infty} (\lambda a_n) = \lambda (\lim_{x \rightarrow \infty} a_n)$ ,*

ii.  *$\lim_{x \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \lim_{x \rightarrow \infty} a_n + \lim_{x \rightarrow \infty} b_n$ .*

**Kanıt:** İlk özelliği kanıtlayalım. Limite  $a$  diyelim. Her  $\varepsilon > 0$  için öyle bir  $N$  doğal sayısı vardır ki her  $n > N$  için

$$\|a_n - a\| < \frac{\varepsilon}{|\lambda|}$$

sağlanıyor olmalı. Bu durumda her  $n > N$  için

$$\|\lambda a_n - \lambda a\| = |\lambda| \cdot \|a_n - a\| < |\lambda| \frac{\varepsilon}{|\lambda|} = \varepsilon$$

olur. Bu da ilk önermeyi kanıtlar.

Şimdi ikinci önermeyi kanıtlayalım.  $(a_n)$  ve  $(b_n)$  dizilerinin limitlerine sırasıyla  $a$  ve  $b$  diyelim. Amacımız ise her  $\varepsilon > 0$  için

$$\|(a_n + b_n) - (a + b)\| < \varepsilon$$

özelliğini her  $n > N$  için sağlayan bir  $N$  doğal sayısı bulmak. İki dizinin yakınsaklığını teker teker ifade edecek olursak her  $\varepsilon > 0$  için

$$\|a_n - a\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

özelliğini her  $n > N_1$  için sağlayan bir  $N_1$  doğal sayısı,

$$\|b_n - b\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

özelliğini her  $n > N_2$  için sağlayan bir  $N_2$  doğal sayısı vardır diyebiliriz.  $N = \max\{N_1, N_2\}$  olsun. Bu durumda her  $n > N$  için bu iki eşitsizlik yine sağlanır. Şimdi,

$$\|(a_n + b_n) - (a + b)\| = \|(a_n - a) + (b_n - b)\| \leq \|a_n - a\| + \|b_n - b\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

hesabını her  $n > N$  için yapabiliriz. Bu da ikinci önermeyi kanıtlar.  $\square$

Bu, o meşhur toplamların limiti ile limitlerin toplamının eşit olduğunu söyleyen özelliktir. Eğer yakınsak dizilerin epsilonolu tanımını bilmeseydik bu kanıtı yapamazdık. Yapılıyorsa da ben bilmiyorum. Yakınsak dizilerde iki vektörün farkının normunun sürekli küçüldüğünden bahsedebiliriz. Demek ki iki vektörün normunun farkı belli bir değeri aşamaz, aksi halde yakınsaklık olmazdı. Peki ya dizinin terimlerinin normu hakkında ne söyleyebiliriz? Sizce yakınsak dizideki vektörlerin normu, her değeri alabilir mi? Cevap, hayır. Yakınsak dizilerdeki terimlerin uzunluğu, yani normu, belli bir değeri aşamaz. Bu bize yeni bir tanım gerektiriyor.

**Tanım.**  $V$  normlu uzayı üzerinde bir  $(a_n)$  dizisi alalım. Bir  $M > 0$  reel sayısı ve her  $n \in \mathbb{N}$  için

$$\|a_n\| < M$$

oluyorsa  $(a_n)$  dizisine bir **sınırlı dizi** denir.

İddia ettiğimiz üzere her yakınsak dizi sınırlıdır fakat bunun tersi doğru değildir. Mesela  $\mathbb{R}$  üzerinde öklid normu ile  $a_n = (-1)^n$  dizisine bakalım. Bu, klasik bir örnek olup belki de her kitapta vardır. Bu dizi sınırlıdır, zira dizinin terimleri yalnızca  $-1$  ve  $1$  elemanlarından oluşur. Bu elemanların normları  $2$ 'den küçük olduğu için dizi sınırlıdır. Ama yakınsak değildir.  $\varepsilon = \frac{1}{2}$  alalım. Her  $N$  doğal sayısı için

$$|a_{2N+1} - 1| = |(-1)^{2N+1} - 1| = |-1 - 1| = |-2| = 2 > \varepsilon$$

olacağından hiçbir  $N$  doğal sayısı için  $n > N$  koşulunu sağlayan bazı doğal sayılar  $|a_n - a| < \varepsilon$  özelliğini sağlamaz. Bu da yakınsaklığı bozar. Karşı örneğimizi verdiğimizize göre şimdi iddiamızı kanıtlayalım.

**Önsav 4.4.3.** Her yakınsak dizi sınırlıdır.

**Kanıt:** Bir normlu uzayda  $a_n$  yakınsak dizisi alalım ve limite  $a$  diyelim.  $\varepsilon = 1$  şeklinde sabitleme yaparak yakınsak dizinin tanımından bir  $N$  doğal sayısı için

$$\|a_n - a\| < 1$$

özelliğinin her  $n > N$  için sağlandığını söyleyebiliriz. Üçgen eşitsizliğini kullanarak,

$$\|a_n\| - \|a\| < \|a_n - a\| < 1 \iff \|a_n\| < 1 + \|a\|$$

yazabiliriz. Demek ki  $n > N$  indisi için  $a_n$  sınırlıymış. Gerisi çok kolay. Geriye kalan

$$a_1, a_2, \dots, a_{N-1}$$

terimleri sonlu olduğundan

$$M := \max\{\|a_1\|, \|a_2\|, \dots, \|a_N\|, \|a\| + 1\}$$

tanımını yapabiliriz. Her  $n \in \mathbb{N}$  için  $\|a_n\| < M$  olduğu açıktır, yani dizi sınırlıdır.  $\square$

Yakınsak dizilere ilginç bir örnek olarak ortogonal dizileri verebiliriz. Ortogonal dizi ne mi ola ki? Birbirinden farklı her iki elemanı ortogonal olan diziyeye **ortogonal dizi** adı verilir. Sonlu boyutlu uzaylarda ortogonal diziler sıfıra yakınsar, neden mi? Ortogonal elemanların doğrusal bağımsız olduğunu biliyoruz. Demek ki ortogonal bir diziyeye en fazla uzayın boyutu kadar sıfırdan farklı eleman yazabiliriz. Yani sonlu boyutlu uzaylarda ortogonal dizilerin sıfırdan farklı terim sayısı da sonludur. Bu da demek oluyor ki sonlu boyutlu iç çarpım uzaylarında ortogonal diziler bir yerden sonra sadece 0 değeri alıyormuş. Böyle bir dizinin sıfıra yakınsadığı bariz. Fakat sonsuz boyutlu uzaylarda bu durum geçerli değildir. Örneğin  $\mathbb{R}^\infty$  uzayındaki kanonik taban elemanlarını bir dizi olarak düşünebilirsiniz:

$$a_1 = (1, 0, 0, \dots), a_2 = (0, 1, 0, \dots), a_3 = (0, 0, 1, 0, \dots).$$

Bu dizinin elemanları ortogonal olmasına rağmen yakınsak değildir.

**Önsav 4.4.4.**  $V$  vir iç çarpım uzayı ve  $(a_n), (b_n)$  bu uzayda yakınsak diziler olsun. Bu durumda

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle a_n, b_n \rangle = \langle \lim_{n \rightarrow \infty} a_n, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \rangle$$

eşitliği sağlanır.

**Kanıt:**  $(a_n)$  ve  $(b_n)$  dizilerinin limitlerine sırasıyla  $a$  ve  $b$  diyelim. Her  $\varepsilon > 0$  için

$$|\langle a_n, b_n \rangle - \langle a, b \rangle| < \varepsilon$$

eşitsizliğini her  $n > N$  için sağlayan bir  $N \in \mathbb{N}$  arıyoruz.

$$\begin{aligned} |\langle a_n, b_n \rangle - \langle a, b \rangle| &= |\langle a_n, b_n \rangle - \langle a_n, b \rangle + \langle a_n, b \rangle - \langle a, b \rangle| \leq |\langle a_n, b_n \rangle - \langle a_n, b \rangle| + |\langle a_n, b \rangle - \langle a, b \rangle| \\ &= |\langle a_n, b_n - b \rangle| + |\langle a_n - a, b \rangle| \leq \|a_n\| \|b_n - b\| + \|b\| \|a_n - a\| \end{aligned}$$

Son eşitsizliğe geçerken Cauchy-Schwarz eşitsizliğini kullandık. Buradan itibaren  $(a_n)$  ve  $(b_n)$  dizilerinin yakınsaklığını kullanabiliriz. Ayrıca Önsav 4.4.3'ten ötürü bu diziler sınırlıdır. Haliyle bir  $M > 0$  ve her  $n \in \mathbb{N}$  için

$$\|a_n\|, \|b_n\| < M$$

olur. Şimdi  $\varepsilon > 0$  sabitleyelim ve bir  $n > N$  için

$$\|b_n - b\| < \frac{\varepsilon}{2M}, \|a_n - a\| < \frac{\varepsilon}{2\|b\|}$$

olsun. O halde her  $n > N$  için

$$|\langle a_n, b_n \rangle - \langle a, b \rangle| \leq \|a_n\| \|b_n - b\| + \|b\| \|a_n - a\| < \frac{\varepsilon M}{2M} + \frac{\varepsilon \|b\|}{2\|b\|} = \varepsilon$$

elde ederiz. Bu da önsavı kanıtlar.  $\square$

Bu kanıtı yaparken yakınsak dizilerin sınırlılığı önem arz etti. Eğer böyle bir önerme kanıtlamamış olsaydık, kanıttaki  $\|a_n\|$  terimini sınırlayamazdık. Böylece kanıtımız sekt-eye uğrardı. Neyse ki böyle bir sorunla karşılaşmadık. Demek ki limit yalnızca toplama ve sklalerle çarpmaya dağılmıyor, aynı zamanda iç çarpıma da dağılıyor.

**Sonuç 4.4.1.** *Sonlu boyutlu bir iç çarpım uzayında  $(a_n)$  ortogonal bir dizi ise her  $x$  vektörü için*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle a_n, x \rangle = 0$$

olur.

Yakınsak dizi olmayan ama yakınsak dizilere aday bir dizi örneği vereceğiz. Rasyonel sayılar uzayını düşünelim.

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

dizisini düşünelim. Aşına olacağımız üzere bu dizinin limiti  $e$  sayısı adı verilen özel bir sayıdır. Ne var ki bu limit bir rasyonel sayı değildir fakat dizinin bütün terimleri rasyoneldir. Yani dizinin terimleri bir yere yaklaşıyor ama yaklaştığı yer o uzaya ait değil. Bu durumda yakınsak dizi tanımı bizi kurtarmaz. Elemanları arasındaki mesafe sürekli küçülen ama bir yere yakınsama garantisi vermeyen diziler tanımlamamız gerekiyor.

**Tanım.**  $V$  bir normlu uzay olsun ve  $(a_n)$  bu uzayda bir dizi olsun. Her  $\varepsilon > 0$  için

$$\|a_n - a_m\| < \varepsilon$$

koşulunu her  $n, m > N$  için sağlayan bir  $N$  doğal sayısı var ise  $(a_n)$  dizisine bir **Cauchy dizisi** denir.

Cauchy dizilerinin toplamları, skaler ile çarpımları yine bir Cauchy dizisidir. Ayrıca her Cauchy dizisi sınırlıdır. Bunların kanıtlarını size bırakıyoruz. Fakat her Cauchy dizisi, örneğini verdiğimiz üzere yakınsak değildir. Bunun tersi ise her zaman doğrudur.

**Önsav 4.4.5.** *Her yakınsak dizi, bir Cauchy dizisidir.*

**Kanıt:**  $(a_n)$  bir normlu uzayda yakınsak bir dizi olsun. Bu dizinin limitine  $a$  diyelim. Her  $\varepsilon > 0$  için yakınsaklığı sağlayan bir  $N$  doğal sayısı bulduk diyelim. O halde her  $n, m > N$  için

$$\|a_n - a_m\| = \|a_n - a + a - a_m\| \leq \|a_n - a\| + \|a_m - a\| < \varepsilon$$

diyebiliriz. Bu da kanıtı tamamlar.  $\square$

O halde her yakınsak dizinin terimleri gittikçe birbirine yaklaşıyor olmalıdır. Biz her Cauchy dizisi yakınsak değildir dedik ama, bunun sağlandığı uzaylar da var. Mesela  $\mathbb{R}^n$  uzayında her Cauchy dizisi yakınsaktır. Bu durum  $\mathbb{C}^n$  uzayı için de geçerlidir. Bu tür uzaylara **tam uzay** adı verilir.

**Tanım.** Normlu tam uzaylara **Banach Uzayı**, tam iç çarpım uzaylarına da **Hilbert Uzayı** denir. Tanımları gereği her Hilbert uzayı bir Banach uzayıdır.

Bazı tipik Hilbert uzayı örnekleri şunlardır:

- $\mathbb{R}^n$  ve  $\mathbb{C}^n$ : Sonlu boyutlu tüm iç çarpım uzayları Hilbert uzayıdır. Çünkü her norm tamlığa sahiptir.
- $l^2 = \{(x_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty\}$ : Sonsuz boyutlu bir Hilbert uzayıdır. İç çarpım

$$\langle x, y \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \overline{y_n}$$

şeklinde tanımlanır.

- $L^2[a, b]$ : Tüm  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  fonksiyonları için

$$\int_a^b |f(x)|^2 dx < \infty$$

olması yeterlidir. Bu uzayda iç çarpım

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) \overline{g(x)} dx$$

şeklinde tanımlanır.

Hilbert uzaylarında önemli bir kavram ise kapalı küme kavramıdır.  $H$  bir Hilbert uzayı olsun ve bir  $v \in H$  sabitleyelim. Bu seçtiğimiz elemana en fazla belli bir uzaklıkta olan elemanlar bir küme oluşturur,  $r > 0$  olmak üzere:

$$B(v, r) := \{u \in H : \|v - u\| \leq r\}$$

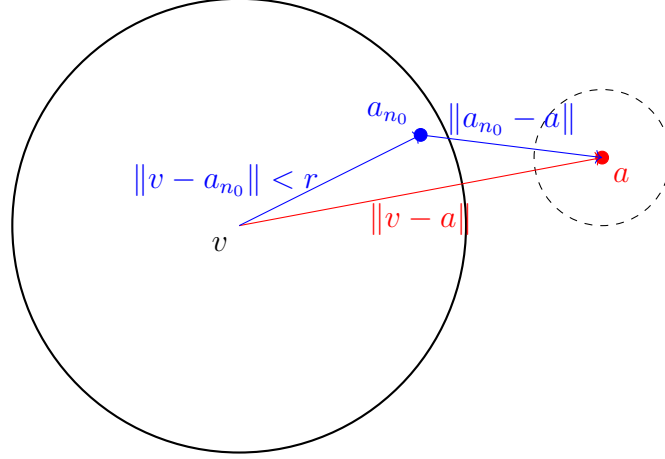
tanımını yapalım. Bu küme,  $v$ 'ye uzaklığı en fazla  $r$  olan elemanlar kümesidir. Bu tür bir kümeye  $r$  yarıçaplı **kapalı yuvar** ya da **kapalı top** adı verilir. Kapalı yuvarların sonlu sayıda birleşimlerinden oluşan kümelere ise **kapalı küme** adı verilir. Bu tür kümelerin en önemli özelliklerinden biri ise şudur: Eğer bir dizi kapalı bir kümenin elemanlarından oluşuyorsa, limiti de o kümededir. Bunu önce tek bir kapalı yuvar için gösterelim. Yakınsak bir  $(a_n)$  dizisi,  $B(v, r)$  yuvarının elemanlarından oluşsun. Yani her  $n \in \mathbb{N}$  için  $a_n \in B(v, r)$  olsun. Limite  $a$  diyelim. Eğer dizinin limiti, yuvarın dışarısında olsaydı  $\varepsilon = \|v - a\| - r$  seçtiğimizde en az bir  $n_0 \in \mathbb{N}$  için

$$\|a_{n_0} - a\| < \varepsilon = \|v - a\| - r$$

olurdu. Fakat dizinin elemanları  $B(v, r)$  yuvarında olduğu için  $\|v - a_{n_0}\| < r$  olmalı. Bu durumda,

$$\|v - a\| \leq \|v - a_{n_0}\| + \|a_{n_0} - a\| < r + \|v - a\| - r = \|v - a\|$$

elde ederdik ki bu bir çelişki.



Şekil 26: Çelişkinin Görseli

Çelişkinin nereden kaynaklandığını anlamak için Şekil 25'e bakabilirsiniz. Burada kesikli daire,  $\varepsilon > 0$  yarıçaplı bir yuvara denk geliyor. Büyük daire ise  $r$  yarıçaplı daireye denk geliyor. Dizinin  $a_{n_0}$  elemanı güya büyük dairenin içinde kalmalı, fakat yakınsaklık varsayımına göre de kesikli dairenin içinde kalmalıydı. İki daire ayrıık olduğundan  $a_{n_0}$  noktası her iki çemberin içinde bulunamaz. Bu da bize bir çelişki veriyor.

Bunun tersi de geçerlidir. Terimleri belli bir kümeye ait her dizinin limiti yine o kümede oluyorsa o küme kapalıdır. Bunu anlamak için terimleri  $A$  kümesinden olan her  $(a_n)$  dizisinin limitinin yine  $A$ 'da olduğunu varsayalım. Yakınsak her dizi sınırlı olduğundan dizinin terimlerini

$$\|a_n\| \leq M$$

gibi bir sayı ile sınırlayabiliriz. Hatta  $\sup(a_n) = M$  alalım. Demek ki dizinin terimlerini kapalı bir yuvar içine hapsedebiliyoruz. Ayrıca bunu elde ettiğimiz yuvar  $A$ 'nın içinde kalacak şekilde yapabiliyoruz. Bu şekildeki her kapalı yuvarın birleşimini alarak  $A$ 'yı elde ederiz.

**Önsav 4.4.6.**  $H$  bir Hilbert uzayı olsun ve  $S \subseteq H$  boştan farklı herhangi bir altküme olsun. Bu durumda  $S^\perp$  kümesi kapalıdır.

**Kanıt:** Herhangi bir yakınsak  $(a_n)$  dizisi alalım ve bu dizinin terimleri  $S^\perp$  kümesinden olsun. Bir  $x \in S$  ve her  $n$  doğal sayısı için

$$\langle x, a_n \rangle = 0$$

olur. Her iki tarafta da limit alarak

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle x, a_n \rangle = 0 \iff \langle x, \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \rangle = 0$$

buluruz. Demek ki dizinin limiti de  $S^\perp$  kümesinde olmalıymış. Buradan istediğimiz çıkar.  $\square$

Şimdi Hilbert uzaylarında temel bir geometrik sonuç kanıtlayacağız. Herhangi bir kapalı kümedenin dışarısındaki her eleman için, o kapalı kümenin elemanı olan bir ve bir tek eleman vardır ki dışarıdaki elemana en yakın olsun.

**Önsav 4.4.7.** *A, bir H Hilbert uzayınının kapalı bir altuzayı olsun. Her  $x \in H$  için bir ve bir tek öyle bir  $y \in A$  vardır ki*

$$\|x - y\| = \inf_{z \in A} \|x - z\|$$

olur.

**Kanıt:** Öncelikle böyle bir  $y$  noktasının varlığını kanıtlayalım.

$$d := \{\|x - z\| : z \in A\}$$

tanımını yapalım. Sıfır bir alt sınır olduğundan böyle bir eleman vardır. Demek ki öyle bir  $(y_n)$  dizisi var ki

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x - y_n\| = d$$

olsun. O halde her  $\varepsilon > 0$  için

$$\|x - y_n\| < d + \varepsilon$$

eşitsizliğini her  $n > N$  için sağlayan bir  $N$  doğal sayısı vardır. Paralelkenar kuralından ötürü,

$$\|y_m - y_n\|^2 + \|2x - y_m - y_n\|^2 = 2\|x - y_m\|^2 + 2\|x - y_n\|^2$$

olur.  $A$  bir altuzay olduğundan  $\frac{y_m + y_n}{2} \in A$  olur, dolayısıyla infimum tanımından ötürü

$$\|x - (y_m + y_n)/2\| \geq d$$

olur. Bu durumda her  $n, m > N$  için

$$\begin{aligned} \|y_n - y_m\|^2 &= 2\|x - y_m\|^2 + 2\|x - y_n\|^2 - \|2x - y_m - y_n\|^2 \\ &\leq 4(d + \varepsilon)^2 - 4d^2 \\ &\leq 4\varepsilon(2d + \varepsilon) \end{aligned}$$

elde ederiz. Buradan  $(y_n)$  dizisinin bir Cauchy dizisi olduğu çıkar.  $H$  bir Hilbert uzayı olduğundan  $(y_n)$  yakınsaktır, limite  $y$  diyelim.  $A$  kapalı olduğundan  $y \in A$  olmalıdır. Buradan,

$$\|x - y\| = \|x - \lim_{n \rightarrow \infty} y_n\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x - y_n\| = d$$

elde ederiz. Varlığı kanıtladık. Tekliğe geçelim. Diyelim  $y' \in A$  için

$$\|x - y\| = \|x - y'\| = d$$

oluyor.  $A$  bir altuzay olduğundan  $(y + y')/2 \in A$  olup

$$0 \leq \|y - y'\|^2 \leq 2\|x - y\|^2 + 2\|x - y'\|^2 - \|2x - y - y'\|^2 = 4d^2 - 4\|x - (y + y')/2\|^2 \leq 0$$

eşitsizliğinden  $y = y'$  elde ederiz.  $\square$

$Ax = b$  bir doğrusal denklem sistemi olsun. Bu denklemin bir çözümünü kesin olarak bulamayabiliriz. O halde umutsuzluğa kapılmak yerine denklemin sağlamaya en yakın çözümü bulmaya odaklanabiliriz. Gönül isterdi ki

$$\|Ax - b\| = 0$$

denklemini çözelim. Çözemesek bile  $B(0, \|b\|)$  kapalı altuzayını ele alarak Önsav 4.4.7 uygulayabiliriz. Demek ki öyle bir  $x_0 \in H$  var ki  $Ax_0$  bu yuvara en yakın vektör olsun. Döndük dolandık yine lineer denklem sistemlerine geldik. Her ne kadar konu teorik gözükse de, lineer denklem sistemleri gibi daha uygulamaya yönelik şeyleri açıklayabiliyoruz. Amacımız da o değil mi zaten?

Tüm bunların yanı sıra doğrusal denklem sistemlerini diziler yardımıyla da çözmek isteyebiliriz. Bir  $Ax = b$  denklem sistemi alalım öyle ki

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \\ a_{1,n} & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

olsun. Her  $i \in \{1, \dots, n\}$  için  $a_{i,i} \neq 0$  varsayımını yapalım. O halde denklemin  $i$ 'inci satırındaki değişkeni yalnız bırakarak

$$x_i = a_{i,i}^{-1} \left( c_i - \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{i,j} x_j \right)$$

yazabiliriz. Buradan motivasyon olarak bir  $(a_i)^{(k)}$  dizisini

$$x_i^{(1)} = 0,$$

$$x_i^{(k+1)} = a_{i,i}^{-1} \left( c_i - \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{i,j} x_j^{(k)} \right)$$

yineleme bağıntısı ile tanımlayalım. İndisler karışmasın diye alışlagelmişin aksine dizinin terim sayısını gösteren indisi yukarı yazdık. Bu dizinin henüz yakınsak olup

olmadığını bilmiyoruz fakat herhangi bir şey söylemeden önce diyelim ki bu dizi yakınsak. O zaman her iki tarafta limit alarak

$$\begin{aligned}
b &= \lim_{n \rightarrow \infty} x_i^{(n+1)} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} a_{i,i}^{-1} \left( c_i - \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{i,j} x_i^{(n)} \right) \\
&= a_{i,i}^{-1} \left( c_i - \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{i,j} (x_i^{(n)}) \right) \\
&= a_{i,i}^{-1} \left( c_i - \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{i,j} b_i \right)
\end{aligned}$$

olur. Buradan  $b_i$ 'nin bu sistemin çözümünün  $i$ 'inci girdisine eşitmiş. Şimdi bu dizinin yakınsaklığını kanıtlayalım.

$$\begin{aligned}
|x_i^{(k)} - b_i| &= \left| a_{i,i}^{-1} \left( c_i - \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{i,j} x_j^{(k-1)} \right) - b_i \right| \\
&= \left| a_{i,i}^{-1} \left( c_i - \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{i,j} x_j^{(k-1)} \right) - a_{i,i}^{-1} \left( c_i - \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{i,j} b_j \right) \right| \\
&= \left| a_{i,i}^{-1} \left( \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{i,j} x_j^{(k-1)} - \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{i,j} b_j \right) \right| \\
&= \left| a_{i,i}^{-1} \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{i,j} (x_j^{(k-1)} - b_j) \right| \\
&= \left| a_{i,i}^{-1} \right| \left| \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{i,j} (x_j^{(k-1)} - b_j) \right| \\
&\leq \left| a_{i,i}^{-1} \right| \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{i,j}| |x_j^{(k-1)} - b_j|
\end{aligned}$$

Bu hesaplamayı en sağdaki için  $k - 1$  kere daha yaparak  $|x_j^{(k-1)} - b_j|$

$$|x_i^{(k)} - b_i| < \left| a_{i,i}^{-1} \right|^k \left( \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{i,j}| |x_j^{(0)} - b_j| \right)^k < \frac{|\sum_{j=1, j \neq i}^n a_{i,j}|^k |\sum_{j=1, j \neq i}^n b_j|^k}{|a_{i,i}^{-1}|^k}$$

şeklinde bir üstten sınırlama elde ederiz.  $|\sum_{j=1, j \neq i}^n b_j|$  ifadesi zaten sabit bir sayı, o halde yakınsamanın gerçekleşmesi için

$$\frac{|\sum_{j=1, j \neq i}^n a_{i,j}|}{|a_{i,i}^{-1}|} < 1$$

olması yeter bir koşuldur. Bu yakınsama algoritmasına **Jacobi İterasyonu** adı verilir ve doğrusal denklem sisteminlerin çözümlerini nümerik olarak hesaplamada önemli bir yer tutar.

### Egzersizler

**Egzersiz 4.4.1.**  $H$  bir Hilbert uzayı ve bir  $u \in H$  seçilsin eleman olsun.  $H$  uzayı üzerinde bir  $(b_n)$  dizisi alalım ve

$$a_n := \|b_n - u\|$$

dizisini tanımlayalım. Eğer  $(a_n)$  dizisi 0'a yakınsıyorsa  $(b_n)$  dizisinin  $u$  vektörüne yakınsadığını gösteriniz. Bu önermenin tersinin doğru olup olmadığını araştırınız.

**Egzersiz 4.4.2.** Yukarıdaki egzersizde  $H = \mathbb{R}^\infty$  alalım. Rastgele

$$\begin{aligned} a_1 &= (a_{1,1}, a_{1,2}, \dots), \\ a_2 &= (a_{2,1}, a_{2,2}, \dots), \\ &\vdots \\ a_n &= (a_{n,1}, a_{n,2}, \dots) \in H \end{aligned}$$

elemanları alalım öyle ki sonlu tane  $i, j$  için  $a_{ij} \neq 0$ . Bir  $c = (c_1, c_2, \dots)$  sabitleyelim, yine sonlu adet  $i$  için  $a_{i,j} = c_i \neq 0$  olsun.

$$Kr_{i,n,k}a_j = (a_{j,1}, \dots, a_{j,i}, a_{k,i+1}, a_{k,i+2}, \dots, a_{k,i+n}, a_{j,i+n+1}, \dots)$$

tanımını yapalım.  $X_0 = \{a_1, \dots, a_n\}$  ve

$$X_i = X_{i-1} \cup \{Kr_{1,\varphi(1),\vartheta(1)}(a_1), \dots, Kr_{n,\varphi(1),\vartheta(1)}(a_n)\}$$

olsun.  $\varphi(n), \vartheta(k)$  rastgele bir doğal sayı olsun. Bir  $(x_n)$  dizisini,

$$x_n \in X_n; \|x_n\| = \min\{\|a - c\| : a \in X_n\}$$

kuralı ile tanımlayalım.  $(x_n)$  dizisinin yakınsak bir alt dizisi olduğunu kanıtlayın.

## 4.5 Yalancı Ters (Pseudoinverse)

Biliyoruz ki verilen bir  $Ax = b$  denklem sisteminin çözümünü her zaman bulamayabiliriz. Bunun en önemli nedeni bu denkleme karşılık gelen  $T(x) = b$  dönüşümünün örten olmamasıdır. Elbette,  $T(x) = b$  sistemini çözemese bile  $\|T(x) - b\|$  normunu minimum yapmayı deneyebiliriz. Bunu yapabildiğimizi önceki bölümde açıklamıştık, fakat nasıl yapacağımızı söylememiştik. Bu bölümdeki amacımız  $T^{-1}$  kadar etkili olmasa da ters fonksiyon gibimsi bir  $T^\dagger(b)$  doğrusal dönüşümü bulmak. Son olarak denklem sistemleri sonlu boyutlarda anlamlı bir kavramdır. O yüzden bu bölümde  $V$  uzayını sonlu boyutlu bir iç çarpım uzayı olarak alacağız.

**Önsav 4.5.1.**  $T \in \text{Hom}(V, W)$  olsun.  $T|_{\ker(T)^\perp} : \ker(T)^\perp \rightarrow \text{im}(T)$  fonksiyonu

$$T|_{\ker(T)^\perp}(x) := T(x)$$

*kuralıyla birlikte birebir ve örtendir.*

**Kanıt:** Herhangi bir  $v \in \ker(T)^\perp$  için  $T|_{\ker(T)^\perp}(v) = 0$  olsun. O halde tanım gereği  $T(v) = 0$  olmalıdır. Demek ki  $v \in \ker(T) \cap \ker(T)^\perp$  olmalı. Fakat bu,  $v = 0$  demek. Buradan  $\ker(T|_{\ker(T)^\perp}) = \{0\}$  çıkar. Bu da birebirliği kanıtlar.

Şimdi örtenliği gösterelim.  $w \in \text{im}(T)$  olsun. Demek ki bir  $u \in V$  için  $T(u) = w$  olmalı. Önsav 4.2.5'ten ötürü bir  $v \in \ker(T)$  ve  $v' \in \ker(T)^\perp$  için

$$u = v + v'$$

olur. Buradan

$$w = T(u) = T(v + v') = T(v) + T(v') = T(v')$$

gelir. Demek ki  $T|_{\ker(T)^\perp}$  örtenmiş. □

**Sonuç 4.5.1.** Her  $T \in \text{Hom}(V, W)$  için  $(T|_{\ker(T)^\perp})^{-1} \in \text{Hom}(V, W)$  olur.

**Tanım.**  $T^\dagger : W \rightarrow V$  dönüşümünü

$$T^\dagger(v) = (T|_{\ker(T)^\perp})^{-1} \circ \text{proj}_{\text{im}(T)}(v)$$

*kuralı ile tanımlayalım. Bu  $T^\dagger$  fonksiyonuna  $T$ 'nin **yalancı tersi** ya da **Moore-Penrose tersi** adı verilir.*

Yalancı ters fonksiyon, bir nevi gerçekten ters fonksiyonu verir. Eğer  $T$  tersinir ise  $T^{-1} = T^\dagger$  sağlanır. Bunu görmek için  $T$ 'yi tersinir varsayalım. Bu durumda  $\ker(T) = \{0\}$ , yani  $\ker(T)^\perp = V$  olur. Ayrıca  $\text{im}(T) = W$  olur. Bu ikisini kullanarak,

$$\begin{aligned} \text{proj}_{\text{im}(T)}(w) &= \text{proj}_W(w) = w \\ (T|_{\ker(T)^\perp})^{-1} &= (T|_V)^{-1} = T^{-1} \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece  $T^{-1} = T^\dagger$  sağlanır. Başka şeyler de bulmalıyız, eğer  $T$  tersinir olsaydı  $T \circ T^{-1} = Id_W$  ve  $T^{-1} \circ T = Id_V$  olması gerekirdi. Peki, yalancı ters için bu durum

nasıl olur? Öncelikle  $T \circ T^\dagger$  fonksiyonuna bakalım. Bazı  $u \in \text{im}(T)$  ve  $u' \in \text{im}(T)$  için  $w := u + u'$  olsun. Buradan

$$T(T^\dagger(w)) = T(T^\dagger(u + u')) = T(T^\dagger(u) + T^\dagger(u')) = T(T^\dagger(u)) = u = \text{proj}_{\text{im}(T)}(w)$$

çıkar.  $T \dagger \circ T$  için  $v = u + u'$  eşitliğini bazı  $u \in \ker(T)$  ve  $u' \in \ker(T)^\perp$  için yazalım. Hesap yaparsak

$$T \dagger (T(v)) = T^\dagger(T(u) + T(u')) = T^\dagger T(u') = u' = \text{proj}_{\ker(T)^\perp}(v)$$

elde ederiz. Bu sonucu yazalım.

**Sonuç 4.5.2.**  $T \in \text{Hom}(V, W)$  olsun. Bu durumda;

i.  $T$  tersinir ise  $T = T^{-1}$ ,

ii.  $T \circ T^\dagger = \text{proj}_{\text{im}(T)}$ ,

iii.  $T^\dagger \circ T = \text{proj}_{\ker(T)^\perp}$ .

önergeleri sağlanır.

Bu sonuçtan başka bir şey daha çıkar, eğer  $T$  birebirse  $T^\dagger \circ T = Id_V$  olur, örtense  $T \circ T^\dagger = Id_W$  olur. Artık amacımıza ulaşan son teoremi verebiliriz.

**Teorem 4.5.1.**  $T \in \text{Hom}(V, W)$  ve  $w \in W$  sabit olsun. O halde:

i. Her  $v \in V$  için

$$\|T(T^\dagger(w)) - w\| \leq \|T(v) - w\|$$

eşitsizliği sağlanır, ayrıca eşitlik yalnızca  $v \in T^\dagger(w) + \ker(T)$  olduğu durumda sağlanır,

ii. Eğer  $v \in T^\dagger w + \ker(T)$  ise

$$\|T^\dagger(w)\| < \|v\|$$

eşitsizliği sağlanır ve eşitlik yalnızca  $v = T^\dagger(w)$  durumunda geçerli olur.

**Kanıt:** (i) önermesini kanıtlayalım.  $v \in V$  keyfi bir vektör olsun.

$$T(v) - w = \left( T(v) - T(T^\dagger(w)) \right) + \left( T(T^\dagger(w)) - w \right)$$

yazalım. Sonuç 4.5.2'den  $T(v) - T(T^\dagger(w)) \in \text{im}(T)$  olur. Bu durumda  $T(T^\dagger(w)) - w \in \text{im}(T)^\perp$  olmalıdır. Pisagor teoreminden ötürü

$$\|T(v) - w\|^2 = \|T(v) - T(T^\dagger(w))\|^2 + \|(T(T^\dagger(w)) - w)\|^2$$

olur. Buradan aradığımız eşitsizlik çıkar. Eşitlik durumu ise ancak ve ancak

$$T(v) - T(T^\dagger(w)) = 0$$

ise sağlanır, bu da ancak ve ancak  $v \in T^\dagger(w) + \ker(T)$  durumunda sağlanır.

(ii) Şimdi de  $v = (v - T^\dagger(w)) + T^\dagger(w)$  yazalım. Yalancı tersin tanımından ötürü  $T^\dagger(w) \in \ker(T)^\perp$  olmalıdır. Bu da  $v - T^\dagger(w) \in \ker(T)$  demektir. Pisagor teoreminden aradığımız eşitsizliği yine yazabiliriz. İki normun eşitlik durumu bariz.  $\square$

Bu teoremden ötürü istenilen minimum normu bir  $u \in \ker(T)$  için  $T^\dagger(w) + u$  olarak bulabiliriz. Bir örnek yapalım.

$$\begin{aligned}x + y &= 1 \\x + y &= 2\end{aligned}$$

Yukarıdaki denklem sisteminin bir çözümü yoktur. Eğer olsaydı  $1 = 2$  olurdu, ki bu bir çelişki. Şimdi bir  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  dönüşümünü

$$T(x, y) = (x + y, x + y)$$

tanımını yapalım.  $T(x, y) = (1, 2)$  denklemini çözmeye çalışıyoruz. Bu dönüşümün çekirdeğini

$$\ker(T) = \{(x, y) : (x + y, x + y) = (0, 0)\} = \langle(1, -1)\rangle$$

olarak buluruz. Bu uzayın ortogonal tümleyeni

$$\ker(T)^\perp = \langle(1, -1)\rangle^\perp = \langle\{(1, -1)\}^\perp\rangle = \langle(1, 1)\rangle$$

olarak bulunur. Bu kümenin  $\text{im}(T)$ 'ye eşit olduğuna da dikkat edin. Demek ki her  $(a, b)$  için

$$(a, b) = x(1, 1) + y(1, -1)$$

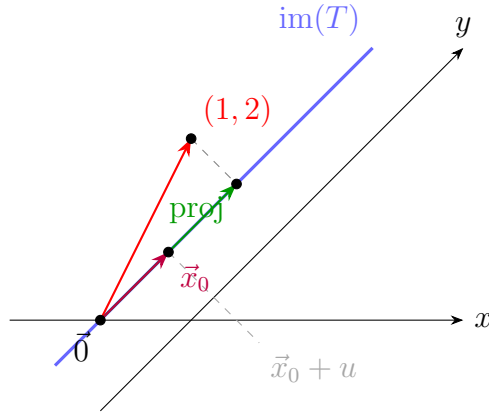
yazılabilir. Buradan  $x = \frac{a+b}{2}$  ve  $y = \frac{a-b}{2}$  bulunur. Demek ki  $(1, 2)$  vektörünün dönüşümün görüntü kümesi üzerine izdüşümü  $(\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$  olarak bulunur. Bu durumda  $T^\dagger(1, 2) = (\frac{3}{4}, \frac{3}{4})$  olarak bulunur. O halde teoremden ötürü

$$(1, -1) + (\frac{3}{4}, \frac{3}{4}) = (\frac{7}{4}, \frac{1}{4})$$

vektörü, en uygun çözümlerden biri olarak bulunur. Denklemde yerine yazarak

$$x + y = \frac{7}{4} - \frac{1}{4} = \frac{6}{4} = 1.5$$

bulunur. Yani bu çözüm, sistemin gerektirdiği iki sonucu (1 ve 2) birebir karşılayamasa da, bu iki talep arasında uzlaşan ve 'ortalama' bir çözüm öneren en kısa (minimum normlu) vektördür. Böylece yalancı ters, en iyi yaklaşımı verir.



Şekil 27: Minimum norm çözümün geometrik yorumu

### Egzersizler

**Egzersiz 4.5.1.** Verilen denklem sisteminin en uygun çözümünü bulunuz.

$$\begin{bmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 4 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 7 \\ 2 \end{bmatrix}$$

**Egzersiz 4.5.2.** Verilen denklem sisteminin en uygun çözümünü bulunuz.

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

**Egzersiz 4.5.3.** Verilen denklem sisteminin en uygun çözümünü bulunuz.

$$\begin{bmatrix} -1 & 9 & 2 \\ 5 & 7 & 3 \\ 8 & -4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix}$$

**Egzersiz 4.5.4.** Verilen denklem sisteminin en uygun çözümünü bulunuz.

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

## 5 Özdeğerler ve Özvektörler

### 5.1 Temel Tanımlar

Bu bölümde karmaşık  $V$  uzayı için  $T : V \rightarrow V$  türünden dönüşümlerini inceleyeceğiz. Başka bir deyişle  $V$  uzayının endomorfizmalarını inceleyeceğiz.  $\text{End}(V)$  uzayı,  $n \times n$  türünden matrislere eş yapısal olduğundan  $\text{End}(V)$  en fazla  $n^2$  boyutludur. Yani,  $V$  sonlu boyutlu ise  $\text{End}(V)$  sonlu boyutludur. Bu boyuta  $m$  diyelim.

$$\begin{aligned}T^0 &= Id \\T^{n+1} &= T \circ T^n \\(T^{-1})^n &= T^{-n}\end{aligned}$$

tanımını yapalım. O halde

$$Id, T, T^2, \dots, T^m$$

listesi doğrusal bağımlı olmalıdır. Demek ki öyle hepsi birden sıfır olmayan  $\alpha_i$  skalerleri var ki  $A = \mathcal{M}(T)$  için

$$a_0I + a_1T + a_2T^2 + \dots + a_mT^m = 0$$

olur. Bunu bir polinoma uydurabiliriz. Yani

$$P(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_mx^m$$

yazarak  $P(T) = 0$  varsayımını yapabiliriz. Dememiz o ki bir  $P(x) \in \mathbb{C}[x]$  polinomunda,  $x$  yerine karmaşık sayı değil de bir fonksiyon yazdık, elemanları çarpmak yerine bileşkelerini aldık. Yine de bildiğimiz bir şey var, bu polinomu doğrusal çarpanlarına ayırmak:

$$(\lambda_1 - x)(\lambda_2 - x) \cdots (\lambda_m - x) = P(x)$$

Bunu dönüşümlere uyarlayarak

$$(\lambda_1 Id - T(x)) \cdots (\lambda_m Id - T(x)) = P(T(x))$$

yazabiliriz. Demek ki  $T$  dönüşümü için öyle bir  $\lambda_i$  vardır ki  $v \neq 0$  için  $T(v) - \lambda v = 0$  olur.  $v = 0$  olması durumunda  $T(v) = \lambda v$  olması bariz olurdu, o yüzden o durumu yasakladık. Bu bize yeni bir tanım fırsatı veriyor.

**Tanım.**  $T \in \text{End}(V)$  ve  $\lambda \in \mathbb{C}$  olsun. Eğer bir  $v \in V$  için

$$T(v) = \lambda v$$

oluyorsa  $\lambda$  skalerine  $T$ 'nin bir **özdeğeri** adı verilir.

**Önsav 5.1.1.**  $\lambda \in \mathbb{C}$  sayısı  $T \in \text{End}(V)$  dönüşümünün bir özdeğeri ancak ve ancak,

i.  $T - \lambda Id$  dönüşümü birebir değil ise,

ii.  $T - \lambda Id$  dönüşümü örten değil ise,

iii.  $T - \lambda Id$  dönüşümü tersinir değil ise.

**Kanıt:** Bir  $\lambda$  özdeğeri için  $(T - \lambda Id)(u) = T(u) - \lambda u = \lambda u - \lambda u = 0$  eşitliğini sağlayan bir  $u \in V$  vardır. Buradan ve Teorem 3.2.4'ten sonuç gelir.  $\square$

**Tanım.**  $\lambda \in \mathbb{C}$  sayısı bir  $T$  dönüşümünün özdeğeri olsun.

$$T(v) = \lambda v$$

özellikliğini sağlayan  $v \in V$  vektörüne  $T$ 'nin bir **özvektörü** denir.

**Önsav 5.1.2.**  $T \in \text{End}(V)$  varsayımını yapalım.  $T$ 'nin birbirinden farklı  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  özdeğerleri için, bu özdeğerlere karşılık gelen özvektörler doğrusal bağımsızdır.

**Kanıt:** Tersine, söz konusu özvektörler doğrusal bağımlı olsun.  $v_1, \dots, v_k$  özvektörleri sırasıyla  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  özdeğerlerine karşılık gelsin. Yani, her  $0 \leq i \leq k$  için  $T(v_i) = \lambda_i v_i$  olsun. Gerekirse bu özvektör listesinin minimal olduğunu varsayabiliriz. Minimallikten ötürü hiçbiri sıfır olmayan  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$  skaler sayıları için

$$\sum_{i=1}^k \alpha_i v_i = 0$$

olur. Her iki tarafa  $S = (T - \lambda_k Id)$  fonksiyonunu uygularsak

$$0 = T(0) = \sum_{i=1}^k S(\alpha_i v_i) = \sum_{i=1}^k \alpha_i S(v_i) = \sum_{i=1}^k \alpha_i (T(v_i) - \lambda_k v_i) = \sum_{i=1}^k \alpha_i (\lambda_i - \lambda_k) v_i$$

$\square$

elde ederiz. Özdeğerler birbirinden farklı olduğundan  $i \neq k$  için  $\alpha_i (\lambda_i - \lambda_k) \neq 0$  olur. Bu durumda

$$0 = \sum_{i=1}^k \alpha_i (\lambda_i - \lambda_k) v_i = \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i (\lambda_i - \lambda_k) v_i$$

elde ederiz. Demek ki  $v_1, \dots, v_{k-1}$  vektörleri doğrusal bağımlı olmalıymış, fakat bu da ilk aldığımız özdeğer listesinin minimalliği ile çelişir.

**Sonuç 5.1.1.**  $T \in \text{End}(V)$  fonksiyonunun en fazla  $\dim(V)$  kadar birbirinden farklı özdeğeri ve özvektörü olabilir.

Bir  $T$  dönüşümünü kök kabul eden bir karmaşık katsayılı polinomların varlığını biliyoruz. Fakat bu polinomu özel bir hale getirmek, hesapları daha kolay bir hale getirebilir. Aradığımız polinomun derecesinin olabildiğince küçük olmasını istiyoruz. Ayrıca başkatsayısını sabitleyerek daha da eşsiz bir konuma getirebiliriz. Eğer bir  $P(x)$  polinomunun kökü  $\alpha$  ise o halde herhangi bir  $\beta \neq 0$  için  $\beta^{-1}P(\alpha) = 0$  olur. Gerekirse bulacağımız polinomu başkatsayıya bölerek başkatsayıyı 1 kabul edebiliriz. Başkatsayı 1 olan polinoma **monik polinom** adı verilir.

**Teorem 5.1.1.** *Herhangi bir  $T \in \text{End}(V)$  dönüşümünü kök kabul eden en küçük dereceli monik bir ve bir tek polinom vardır. Ayrıca bu polinomun derecesi, uzayın boyutundan küçük eşittir.*

**Kanıt:** Eğer  $\dim V = 0$  ise kanıtlanacak bir şey yok.  $\dim V = n$  sayısından küçük boyutu olan her uzay bu özelliği sağlar.  $\dim V$  için tümevarımla kanıtlayacağız. Keyfi bir  $x \in V$  için  $x, T(x), \dots, T^n(x)$  vektörleri doğrusal bağımlı olduğunu görelim. Bu kümeyi bir  $m$  için minimal doğrusal bağımlı olacak şekilde düzenleyelim. Demek ki

$$\alpha_0 x + \alpha_1 T(x) + \dots + \alpha_m T^m(x) = 0$$

eşitliğini sağlayan  $\alpha_0, \dots, \alpha_n$  skalerleri vardır.  $c_i = \alpha_i \alpha_m^{-1}$  tanımını yaparak

$$P(x) := \sum_{i=0}^m c_i x^i$$

polinomunu tanımlayalım.  $P(T(x)) = 0$  olduğu bariz. Polinomun monik olduğu da açık. Minimallikten ötürü  $x, T(x), \dots, T^{m-1}(x)$  vektörleri doğrusal bağımsızdır. Her  $k \geq 0$  tamsayısı için

$$P(T)(T^k(x)) = T^k(P(T)(x)) = T^k(0) = 0$$

eşitliği, en az  $m$  eleman tarafından sağlanıyor olmalı. Demek ki  $\dim \ker P(T) \geq m$  olmalıdır. Buradan

$$\dim \text{im } T = \dim V - \dim \ker(P(T)) \leq \dim V - m$$

elde ederiz.  $S = T|_{\text{im } T}$  dönüşümü için tümevarım varsayımından bir monik  $Q(x)$  polinomu için  $Q(S(x)) = 0$  ve

$$\deg Q(x) \leq \dim \text{im } T \leq \dim V - m$$

olur. Bu durumda her  $v \in V$  için

$$(PQ)((T)(v)) = P(T(v))Q(T(v)) = 0$$

eşitliğinden ve  $\deg Q(x) + m \leq \dim V$  eşitsizliğinden  $PQ$  aradığımız monik polinomdur. Bu özelliği sağlayan en düşük dereceli bir polinom demek ki vardır. Bu varlığı kanıtlar.

Şimdi tekliği kanıtlayalım. Aynı özelliklere sahip iki  $P(x)$  ve  $Q(x)$  polinomu alalım. İki polinom için bölme algoritması kullanarak

$$P(x) = Q(x)K(x) + R(x) \quad (\deg R(x) \leq \deg Q(x) \text{ veya } R(x) = 0)$$

olacak şekilde  $R(x), K(x)$  polinomları bulabiliriz. Her iki tarafta  $x = T(v)$  alarak  $0 = R(T(v))$  elde ederiz. Fakat  $P(x)$  ve  $Q(x)$  polinomlarının minimalliğinden  $R(x) = 0$  olmalıdır, aksi halde  $R(x)$  polinomu diğer polinomalardan daha düşük dereceli olup  $T$ 'yi kök kabul ederdi ki bu da bariz bir çelişki olurdu. Demek ki  $Q(x) \mid P(x)$  olmalıdır. Genelliği bozmadan  $P(x) \mid Q(x)$  alabiliriz. Böylece  $\alpha \neq 0$  için  $P(x) = \alpha Q(x)$  elde ederiz. İki polinom da monik olduğundan başkatsayılarını eşitlemenin tek yolu  $\alpha = 1$  yapmaktır. Demek ki  $P(x) = Q(x)$ . Bu da tekliği kanıtlar. □

Bu bulduğumuz polinom, özel bir ismi hak ediyor.  $T \in \text{End}(V)$  dönüşümünü kök kabul eden minimum dereceli eşsiz bu polinoma  $T$ 'nin **minimal polinomu** adı verilir. Bu teoremdeki eşsizliği kanıtladığımız kısımda  $P(x)$  yerine  $T$ 'yi kök kabul eden herhangi bir  $L(x)$  yazarak yeni bir sonuç elde ederiz.

**Sonuç 5.1.2.**  $P(x)$ ,  $T$ 'nin minimal polinomu olsun ve bir  $L(x)$  polinomu ile her  $v \in V$  için  $L(T(v)) = 0$  olsun. Bu durumda  $P(x) \mid L(x)$  olur.

**Önsav 5.1.3.**  $P(x)$  polinomu,  $T$ 'nin minimal polinomu olsun. O halde  $P$ 'nin her kökü  $T$ 'nin bir özdeğeridir. Ayrıca her özdeğer bu polinomun bir köküdür.

**Kanıt:**  $\lambda$  bir kök olsun. O halde bir  $Q(x)$  polinomu için

$$P(x) = (x - \lambda)Q(x)$$

olur. Demek ki her  $v$  için

$$0 = P(T(v)) = (T(v) - \lambda v)(Q(T(v)))$$

olur.  $P(x)$ 'in minimallüğünden ve  $\deg Q(x) = \deg P(x) - 1$  olduğundan en az bir  $u \in V$  vektörü için  $T(u) - \lambda u = 0$  olmalı. Demek ki  $\lambda$  bir özdeğermiş.

Tersine,  $\lambda$  bir özdeğer olsun.  $v \neq 0$  için  $T(v) = \lambda v$  olsun. Buradan

$$P(\lambda)v = \sum_{i=0}^{\deg P} \alpha_i \lambda^i v = \sum_{i=0}^{\deg P} \alpha_i T^i(v) = 0$$

çıkar. Demek ki  $\lambda$ ,  $P(x)$  polinomunun bir kökümüştür. □

Bir örnek yapalım. Diyelim  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  için  $T(x, y) = (ax+by, cx+dy)$  dönüşümünün özdeğerlerini bulmaya çalışalım. Bu durumda  $T(x, y) = \lambda(x, y)$  denklemini çözmemiz gerekir. Sonuç 5.1.1'den en fazla iki özdeğer olabilir.  $\lambda \in \mathbb{R}$  için

$$\lambda(x, y) = (ax + by, cx + dy)$$

yazalım. Böylece bir denklem sistemi elde ederiz.

$$\lambda x = ax + by$$

$$\lambda y = cx + dy$$

$\lambda$  değerini bulmaya çalışıyoruz. Denklemi biraz düzenleyerek;

$$(\lambda - a)x = by$$

$$(\lambda - d)y = cx$$

elde ederiz. Taraf tarafa çarpma yaparak

$$(\lambda - a)(\lambda - d)xy = bcxy \iff ((\lambda - a)(\lambda - d) - bc)xy = 0$$

elde ederiz. Elbette, çok değişkenli belirsiz bir yere geldik. Kendimizi kısıtlayıp  $x, y \neq 0$  varsayımını yaparak dönüşümün özdeğerlerini

$$\lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc) = 0$$

denkleminin kökleri olarak buluruz. Örneğin,  $T(x, y) = (3x + y, x + 3y)$  olduğunda denklemi

$$\lambda^2 - 6y + 8 = 0$$

şeklinde buluruz. Böylece dönüşümün özdeğerlerini  $\lambda_1 = -4$  ve  $\lambda_2 = -2$  olarak buluruz.

## 5.2 Karakteristik Polinom

Bir doğrusal dönüşümün minimal polinomunu hesaplamak oldukça zorlu olabilir. Bir önceki bölümde bir  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  dönüşümünü sağlayan polinomu

$$\lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc)$$

şeklinde bulmuştuk. Fakat bunun için bayağı bir cebirsel işlem gerekiyordu ve henüz  $\mathbb{R}^n$  için henüz genel bir formülümüz yok. Bunun için nasıl bir kestirme yol bulabiliriz? Bu bölümdeki amacımız bu olacak. Herhangi bir  $T$  dönüşümü ve  $\lambda$  özdeğeri alalım. O halde

$$T(v) - \lambda v = 0$$

denklemini sağlayan vektöre  $\lambda$ 'nın özvektörü dendiğini biliyoruz. Fakat bunu hesaplamak için bir  $\lambda$  değerine ve bir  $v$  vektörüne ihtiyacımız var. O yüzden  $v$  vektörüne ihtiyaç olmadan direkt  $T$  dönüşümüne bağlı bir formül bulmamız gerek. Aklımıza bu noktada determinant gelmeli! Sonuçta bir dönüşümün determinanı, ne tabana bağlı ne de içindeki girdiye bağlı. Yani her  $\lambda$  özdeğeri,

$$\det(T - \lambda Id) = 0$$

denklemini sağlamak zorunda. Böylece  $\lambda$ 'ya bağlı bir bağıntı bulduk.  $P(x) = \det(T - xId)$  ifadesine  $T$ 'nin **karakteristik polinomu** adı verilir.

**Önsav 5.2.1.** *Bir  $T$  dönüşümünün karakteristik ve minimal polinomları sırasıyla  $P(x)$  ve  $Q(x)$  olsun. O halde  $Q(x) \mid P(x)$  olur.*

**Kanıt:**  $Q(x) = (x - \lambda_1) \cdots (x - \lambda_n)$  yazalım. Önsav 5.1.3'e göre her  $\lambda_i$  ifadesi bir özdeğerdir. Demek ki her  $i$  için  $(x - \lambda_i) \mid P(x)$  olmalıdır zira  $\lambda_i$ 'ler aynı zamanda  $P(x)$  polinomunun bir köküdür. Buradan sonuç rahatlıkla çıkar.  $\square$

**Sonuç 5.2.1** (Cayley - Hamilton Teoremi). *Her doğrusal dönüşüm, kendi karakteristik polinomunun bir köküdür.*

**Kanıt:**  $P(x) = Q(x)K(x)$  olsun. Her iki tarafta  $x = T$  alarak

$$P(T) = Q(T)K(T) = 0 \cdot K(T) = 0$$

elde ederiz.  $\square$

**Önsav 5.2.2.**  $P(x)$  polinomu,  $T$ 'nin karakteristik polinomu olsun. O halde  $\det T = P(0)$

**Kanıt:**  $\det(T - \lambda Id) = P(\lambda)$  eşitliğinde  $\lambda = 0$  alarak

$$\det(T) = P(0)$$

elde ederiz.  $\square$

Demek ki karakteristik polinomun sabit terimi determinanti veriyormuş. Buradan yola çıkarak bir matrisin tersini bulabiliriz.  $\det A \neq 0$  olsun ve  $A$ 'nın karakteristik polinomu  $P(x)$  olsun. O halde Sonuç 5.2.1'den  $P(A) = 0$  olduğunu biliyoruz. Polinomu açarak sabit terimi yalnız bırakalım:

$$0 = P(A) = a_0I + (a_1A + \dots + a_nA^n)$$

Burada  $a_0 = \det A$  olduğunu unutmayın. Böylece;

$$I = A \frac{(-1)(a_1 + \dots + a_nA^{n-1})}{\det A}$$

elde ederiz. Demek ki

$$A^{-1} = \frac{(-1)(a_1 + a_2A + \dots + a_nA^{n-1})}{\det A}$$

olmalıymış. Böylece herhangi tersinir bir matrisin tersini karakteristik polinom yardımıyla hesaplayabiliriz.

### 5.3 Üst-Üçgensel Matrisler

Şimdi son derece kullanışlı bir matris türü ile karşınızdayız. Öncelikle

$$\begin{aligned}a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\&\vdots \\a_{nn}x_n &= b_n\end{aligned}$$

gibi bir denklem sistemini düşünün. Yani  $j < i$  ise  $a_{ij} = 0$  olacak şekilde bir doğrusal denklem sistemimiz olsun. Buna denklem sistemi demek biraz ağır kaçabilir, zira bu sistem halihazırda çözülmüş bir sistemdir. Burada  $x_n = \frac{b_n}{a_{nn}}$  olduğunu bildiğimiz için bir üst satırda  $x_n$  yerine bunu yazarak  $x_{n-1} = \frac{b_{n-1}}{a_{n-1}} - \frac{b_n}{a_{n-1}a_{nn}}$  değerini bulabiliriz. Şimdi bir üst satıra daha geçerek yeni değerleri yazarak  $x_{n-2}$  değerini de buluruz: taa ki  $x_1$  değerini bulana kadar! Böylece tüm sistem çözülür. Buradaki

$$\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & * & a_{1n} \\0 & a_{22} & * & a_{2n} \\0 & 0 & * & a_{3n} \\* & * & * & * \\0 & 0 & * & a_{nn}\end{bmatrix}$$

matrisi, **üst-üçgensel matris** olarak adlandırılır.

Ne var ki tüm denklem sistemleri bu şekilde karşımıza çıkmıyor. İsteriz ki verilmiş bir doğrusal denklem sisteminin üst-üçgensel bir şekilde yeniden ifade edebilelim ki denklem rahatça çözülebilir. Bu bölümde üst-üçgensel matrisleri inceleyeceğiz ve bize ne gibi faydaları olabileceğini gözlemleyeceğiz. Bu bölüm boyunca  $V$  bir vektör uzayı ve  $T \in \text{End}(V)$  olacak. Ayrıca  $\mathcal{M}(T)$  ifadesinde girdi ile çıktının tabanlarını eşit kabul edeceğiz.

Örnek olarak  $T(x, y, z) = (-x + y + 2z, 5y + 8z, 4z) \in \text{End}(\mathbb{R}^3)$  alalım. Standart tabana göre bu dönüşümün matris gösterimini

$$\begin{bmatrix}-1 & 1 & 2 \\0 & 5 & 8 \\0 & 0 & 4\end{bmatrix}$$

olarak buluruz. Bu bir üst-üçgensel matristir.

**Önsav 5.3.1.**  $V$ 'nin bir  $v_1, \dots, v_n$  tabanını alalım. Bu tabana göre yazılan  $\mathcal{M}(T)$  matrisi için:

- i.  $\mathcal{M}(T)$  üst-üçgenseldir,
- ii. Her  $j = 1, \dots, n$  için  $T(v_j) \in \langle v_1, \dots, v_j \rangle$  olur,

iii. Her  $v \in \langle v_1, \dots, v_j \rangle$  için  $T(v) \in \langle v_1, \dots, v_j \rangle$  olur;

önergeleri denktir.

**Kanıt:** (i)  $\implies$  (ii) geçişi kolaydır. Bir  $j \in \{1, \dots, n\}$  sabitleyelim. O halde matrisin  $j$ 'inci sütununa bakarak  $T(v_j) \in \langle v_1, \dots, v_j \rangle$  olduğunu rahatlıkla bulabiliriz. Zira matris üst-üçgensel olduğundan  $j < i$  için  $T(v_j) = a_1v_1 + \dots + a_nv_n$  yazımında  $a_i = 0$  olacaktır.

(ii)  $\implies$  (iii) önermesine bakalım.  $v \in \langle v_1, \dots, v_n \rangle$  olsun. Varsayıma göre

$$\begin{aligned} T(v_1) &\in \langle v_1 \rangle \\ T(v_2) &\in \langle v_1, v_2 \rangle \\ &\vdots \\ T(v_j) &\in \langle v_1, \dots, v_j \rangle \end{aligned}$$

olduğundan  $T(v)$  ise hepsinin kesişimi olan  $\langle v_1, \dots, v_j \rangle$  kümesinde olmalıdır.

Son olarak (iii)  $\implies$  (ii) ve (ii)  $\implies$  (i) önermelerine bakabiliriz. Kanıtlanması kolaydır ve okura bırakılmıştır.  $\square$

Şimdi arzulanan teoreme bakalım.

**Teorem 5.3.1.** *Sonlu boyutlu her karmaşık uzay üzerindeki her endomorfizmanın üst-üçgensel bir temsili olacak şekilde bir tabanı vardır.*

**Kanıt:** Eğer  $\dim V = 1$  ise kanıtlanacak bir şey yok. Tümevarımla  $\dim V < n$  için teoremin doğru olduğunu varsayalım ve  $\dim V = n$  için kanıtlayalım. Herhangi bir  $T : V \rightarrow V$  alalım ve  $\bar{T} : V/U \rightarrow V/U$  dönüşümünü  $\bar{T}(v) = T(v)$  olarak tanımlayalım.

Uzay, karmaşık katsayılı olduğundan en az bir özvektörü vardır. Bu özvektöre  $u_1$  diyelim.  $U = \langle u_1 \rangle$  alalım ve  $V/U$  bölüm uzayını değerlendirelim.  $\dim V/U = n - 1$  olduğundan teorem bu bölüm uzayı için doğrudur. Demek ki her  $\bar{T} : V/U \rightarrow V/U$  dönüşümü için öyle  $v_1 + U, \dots, v_{n-1} + U \in V/U$  tabanı vardır ki  $\mathcal{M}(\bar{T})$  üst-üçgensel olur. Önsav 5.3.1'den ötürü

$\bar{T}(v_j + U) \in \langle v_1 + U, \dots, v_j + U \rangle$  olmalıdır. Burdan  $V$ 'ye geçerek her  $v_j$  için  $T(v_j) \in \langle u_1, v_1, \dots, v_j \rangle$  yazabiliriz. Demek ki  $u_1, v_1, \dots, v_j$  tabanı ile  $T$ 'nin üst-üçgensel bir matrisini yazabiliriz. Bu da teoremi kanıtlar.  $\square$

Eğer bir  $T$  endomorfizmasının matrisi bir tabana göre üst-üçgensel oluyorsa en alt satırı kofaktör olarak seçerek matris determinantı tanımından ve tümevarımla  $\det \mathcal{M}(T) = a_{nn} \dots a_{22} a_{11}$  buluruz. Buradan yeni bir sonuç çıkar.

**Önsav 5.3.2.** *Bir üst-üçgensel matris tersinirdir ancak ve ancak matrisin her  $a_{ii}$  girdisi sıfırdan farklı ise.*

Önsav 3.7.2'den ve determinant tanımından bu önsavın kanıtı hemen gelir.

$$B = \{A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{C}) : A \text{ üst-üçgensel, } \det A \neq 0\}$$

kümesini tanımlayalım. Bu bir grup oluşturur ve özel olarak **Borel Altgrubu** adını alır. Bunun bir grup olduğunu anlamak için üst-üçgensel iki matris alalım. Elbette bu matrislere karşılık gelen  $T$  ve  $S$  endomorfizmalarını yazabiliriz. Önsav 5.3.1'den bir  $j \in \{1, \dots, n\}$  için  $S(v_j) \in \langle v_1, \dots, v_j \rangle$  olmalıdır. Şimdi  $T$  dönüşümünü  $S(v_j)$  vektörüne uygulayarak yine Önsav 5.3.1'den  $T(S(v_j)) \in \langle v_1, \dots, v_j \rangle$  elde ederiz. O halde  $T \circ S$  dönüşümünün de matris temsili üst-üçgenseldir. Buradan iki üst-üçgensel matrisin çarpımının üst-üçgensel olduğu çıkar. Geriye, üst-üçgensel bir matrisin matris çarpmasına göre tersinin yine üst üçgensel olduğunu kanıtlamak kalıyor. Fakat bu oldukça kolaydır zira yine Önsav 5.3.1'i kullanarak  $T(v_j) \in \langle v_1, \dots, v_j \rangle$  ise  $v_j \in \langle v_1, \dots, v_j \rangle$  çıkarımına varabiliriz.

**Önsav 5.3.3.**  $V$  sonlu boyutlu bir uzay ve  $T \in \text{End}(V)$  olsun.  $T$ 'nin bir tabana göre üst-üçgensel bir matrisi vardır ancak ve ancak  $T$ 'nin minimal polinomunun tüm çarpanları birinci dereceden ise.

**Kanıt:**  $T$ 'nin üst-üçgensel bir matrisi olsun. Bu matrise  $A$  diyelim. O halde  $\lambda I - A$  matrisi de üst-üçgenseldir. Köşegen girdilerine  $a_1, \dots, a_n$  diyelim. Bu durumda  $\det(\lambda I - A) = (\lambda - a_1) \dots (\lambda - a_n)$  olur. Minimal polinom karakteristik polinomu böldüğüne göre minimal polinom da bu formda olmalı.

Diğer yöne bakalım.  $T$ 'nin minimal polinomunu

$$(x - a_1) \dots (x - a_n)$$

olarak yazalım. Eğer  $n = 1$  ise  $T = a_1 Id$  olup  $T$ 'nin matrisi bariz olarak üst-üçgenseldir. Şimdi  $n$ 'den küçük  $k$ 'lar için bu önermeyi doğru varsayalım.

$$U = \text{im}(T - \lambda_n Id)$$

tanımını yapalım. O halde  $S = T|_U$  dönüşümünün minimal polinomu  $(x - a_1) \dots (x - a_{n-1})$  olur. Tümevarım varsayımından  $S$  dönüşümünün bir tabana göre (bu tabana  $u_1, \dots, u_r$  diyelim.) üst-üçgensel bir matrisi vardır. Demek ki her uygun  $i$  için  $T(u_i) = S(u_i) \in \langle u_1, \dots, u_r \rangle$  olur. Bu tabanı  $u_1, \dots, u_r, v_1, \dots, v_k$  gibi bir tabana genişletelim. Eğer  $i \in \{1, \dots, k\}$  ise

$$T(v_i) = (T - a_i Id)(v_i) + a_i v_i$$

yazarak  $T(v_i) \in \langle u_1, \dots, u_r, v_1, v_k \rangle$  sonucuna varabiliriz. Bu da  $T$ 'nin üst-üçgensel bir temsilini verir.  $\square$

Bazı matrisleri üst-üçgensel hale getiremesek de elimizden geleni yapabiliriz. Bunu **Gauss Eliminasyon Yöntemi** denilen bir algoritma ile deneyeceğiz. Size bir

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 8 \\ x - 2y &= -3 \end{aligned}$$

gibi bir denklem versem hemen yaparsınız, değil mi? Nasıl olacak o iş? Önce katsayıları eşitleriz. İkinci denklemi 2 ile çarparak bunu yapabiliriz.

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 8 \\ 2x - 4y &= -6 \end{aligned}$$

Şimdi ilk denklemde ikinciyi çıkaralım ve ikinci denklemin yerine yazalım.

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 8 \\ (2x + 3y) - (2x - 4y) &= 8 - (-6) \end{aligned}$$

Artık denklem sistemimiz üst-üçgensel bir hale gelmiş oldu:

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 8 \\ 7y &= 14 \end{aligned}$$

Artık rahatça  $y = 2$  ve  $x = 1$  çıkarımına varabiliriz. Bu yöntemi  $n$  denklem için genelleştirebiliriz. Bunun için Sonuç 2.3.2'yi kullanabiliriz. Tümevarımsal düşünelim. Öncelikle iki satırlı bir matris için hesap yapalım.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & \cdots \end{bmatrix}$$

Eğer  $a_{21} = 0$  ise sıkıntı yok. O yüzden  $a_{21} \neq 0$  olsun. Biliyoruz ki matrisin satırları bir uzay belirtiyor. Hatta bu uzayın boyutuna rank ismini vermiştik. Eğer satırlar üreteç kümesi ise Sonuç 2.3.2'ye göre satırları

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots \\ a_{11} - a_{21}a_{21}^{-1}a_{11} & a_{11} - a_{22}a_{21}^{-1}a_{11} & \cdots \end{bmatrix}$$

olan matris de aynı uzayı üretir. Artık ikinci satırının ilk sütunu 0 olan bir matris elde ettik. Aynı işlemi bir  $n \times n$  matrisi için de yapabilirsiniz.

Diyelim ki  $k$  sütun için bunu tekrar ettik. Elimizde

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{k,k} & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{k,k+1} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

şeklinde bir matris kaldı. Önceki satırda  $a_{1,1} = a_{k,k}$  ve  $a_{2,1} = a_{k,k+1}$  gibi düşünerek tekrar işlem yaptığımızda  $k + 1$ 'inci adım için de bu numarayı yapmış olduk. Gerekirse tabanın sırasını değiştirerek matrisi üst-üçgensel bir tabanla yazabiliriz.

## 6 İç Çarpım Uzaylarında Operatörler

### 6.1 Eşlenik Operatörler

Birer  $V, W$ , iç çarpım uzayı için herhangi bir  $T : V \rightarrow W$  dönüşümü alalım. Bu dönüşümün bir iç çarpım ile temsil edilebileceğini Teorem 4.3.9 yardımıyla biliyoruz. Yani  $T(u) = \langle u, v \rangle$  olur. Şimdi

$$\varphi(u) = \langle T(u), v \rangle$$

şeklinde tanımlanan dönüşümü göz önüne alalım. Bu elbette bir doğrusal dönüşümdür. Ayrıca bu dönüşüm  $\varphi : V \rightarrow \mathcal{F}$  şeklinde tanımlıdır. Demek ki Riesz Temsil Teoremini (Teorem 4.3.9)  $\varphi$  dönüşümüne uygulayarak her  $u \in V$  için

$$\varphi(u) = \langle T(u), v \rangle = \langle u, \psi \rangle$$

olacak şekilde bir  $\psi \in W$  bulabiliriz. Biz burada  $\psi = T^*(v)$  isimlendirmesini yapacağız. O halde  $T^* : W \rightarrow V$  fonksiyonu,

$$\langle T(u), v \rangle = \langle u, T^*(v) \rangle$$

eşitliğini sağlayacak şekilde tanımlıdır. Bu fonksiyon iyi tanımlıdır, çünkü bu eşitliği sağlayan  $T^*(v)$  vektörü Teorem 4.3.9'a göre tek türlü belirlenir.

Bu yeni bulduğumuz fonksiyonun bir doğrusal dönüşüm olduğunu gösterelim.  $w_1, w_2 \in W$  olsun. Her  $u \in V$  için,

$$\begin{aligned} \langle u, T^*(w_1 + w_2) \rangle &= \langle T(u), w_1 + w_2 \rangle \\ &= \langle T(u), w_1 \rangle + \langle T(u), w_2 \rangle \\ &= \langle u, T^*(w_1) \rangle + \langle u, T^*(w_2) \rangle \\ &= \langle u, T^*(w_1) + T^*(w_2) \rangle \end{aligned}$$

hesabını yapabiliriz. Bu hesaptan direkt olarak  $T^*(w_1 + w_2) = T^*(w_1) + T^*(w_2)$  sonucuna varamayabiliriz. Unutmayın ki iç çarpım fonksiyonu birebir olmak zorunda değildir. Teorem 4.3.9'un tek türlülik koşulundan ötürü bu sonuca varabiliyoruz. Şimdi herhangi bir  $\lambda \in \mathcal{F}$  için  $T^*(\lambda v) = \lambda T^*(v)$  olduğunu göstermemiz gerekiyor. O kısmı okura bırakıyoruz.

Bu elde ettiğimiz  $T^*$  doğrusal dönüşümüne  $T$ 'nin **eşlenik operatörü** adı verilir.

**Önsav 6.1.1.** *Eşlenik operatörle ilgili aşağıdaki önermeler sağlanır:*

- i.  $T, S \in \text{Hom}(V, W)$  ise  $(T + S)^* = T^* + S^*$  olur.
- ii. Her  $\lambda \in \mathcal{F}$  ve  $T \in \text{Hom}(V, W)$  için  $(\lambda T)^* = \bar{\lambda} T^*$  olur.
- iii. Eşleniğin eşleniği kendisidir:  $(T^*)^* = T$ .

iv. Sonlu boyutlu bir  $U$  iç çarpım uzayı için  $S \in \text{Hom}(W, U)$  ise  $(S \circ T)^* = T^* \circ S^*$  olur.

v.  $Id_V^* = Id$ .

vi. Eğer  $T$  bir izomorfizma ise  $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$  olur.

**Kanıt:** İlk iki önermeyi rutin hesaplarla kanıtlayabiliriz. Okura bırakıyoruz. Üçüncü önerme ise

$$\langle u, (T^*)^*(v) \rangle = \langle T^*(u), v \rangle = \overline{\langle v, T^*(u) \rangle} = \overline{\langle T(v), u \rangle} = \langle u, T(v) \rangle$$

eşitliğinden ve tek türllükten gelir. Dördüncü önerme için bir  $S \in \text{Hom}(W, U)$  alalım.

$$\langle (S \circ T)(u), v \rangle = \langle S(T(u)), v \rangle = \langle T(u), S^*(v) \rangle = \langle u, S^*(T^*(v)) \rangle$$

eşitliği bize istediğimizi verir.

$\langle Id(u), v \rangle = \langle u, v \rangle$  olduğundan beşinci önermeyi de burdan çıkarabiliriz. Son önerme için  $T$  bir izomorfizma olsun. O halde  $T^{-1} \circ T = Id$  eşitliğinde her iki tarafın eşleniğini alarak beşinci ve dördüncü önermelerden ötürü

$$T^* \circ (T^{-1})^* = Id^* = Id$$

buluruz. Demek ki  $T^*$  fonksiyonunun tersi  $(T^{-1})^*$  imiş. Buradan  $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$  çıkar.  $\square$

Eşlenik operatörlerin çekirdek ve görüntü ile ilişkisine bakalım. Eğer  $v \in \ker T$  ise  $0 = \langle T(v), u \rangle = \langle v, T^*(u) \rangle$  eşitliğinden ötürü  $v \perp T^*(u)$  buluruz. Buradan  $v \in \text{im}(T^*)^\perp$  buluruz. Yani,  $\ker T \subseteq \text{im}(T^*)^\perp$  olur. Bunun tersi de geçerlidir. Buradan  $\ker T = \text{im}(T^*)^\perp$  yazabiliriz. Yöntem belli, aşağıdaki önsavın kanıtını okura alıştırma olarak bırakıyoruz.

**Önsav 6.1.2.** Bir doğrusal dönüşüm ve onun çekirdeği ile ilgili aşağıdaki önermeler sağlanır.

- $\ker T^* = \text{im}(T)^\perp$ .
- $\text{im}(T)^* = (\ker T)^\perp$ .
- $\ker T = \text{im}(T^*)^\perp$
- $\text{im}(T) = (\ker T^*)^\perp$

Bir örnek olarak  $T(x, y) = (2x + y, x)$  doğrusal dönüşümünün eşleniğini bulmaya çalışalım. Bunun için herhangi bir  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  vektörü ve her  $(s, t) \in \mathbb{R}^2$  için  $\langle (2x + y, x), v \rangle$  değerini hesaplayalım. İç çarpımı standart iç çarpım alalım. Bu durumda

$$\langle (2x + y, x), (s, t) \rangle = 2xs + ys + xt = x(2s + t) + ys = \langle (x, y), (2s + t, s) \rangle$$

hesabından  $T^*(s, t) = (2s + t, s)$  elde ederiz.  $T = T^*$  eşitliğine dikkat edelim. Bu tür operatörlere **özeşlenik operatör** adı verilir. Buna bir sonraki altbölümde daha detaylı değineceğiz.

Başka bir örnek yapalım.  $S(x, y, z) = (-3x + y, z - y)$  olsun. Standart iç çarpıma göre bu dönüşümün eşleniği bulmaya çalışalım. Herhangi bir  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  vektörü ile  $S(x, y)$  vektörünün iç çarpımını  $\langle (-3x + y, z - y), (a, b) \rangle = -3ax + ay + bz - by$  olarak hesaplarız. Şimdi  $x, y, z$  terimlerini tek bırakmaya çalışalım.  $-3ax + ay + bz - by = -3ax + y(a - b) + bz$ . Bunu yeni bir iç çarpım olarak yazabiliriz.  $\langle (x, y, z), (-3a, a - b, b) \rangle$ . Demek ki  $S^*(a, b) = (-3a, a - b, b)$  olmalıymış. Şimdi iki dönüşümün matrisini standart tabana göre bulmaya çalışalım. Bu kolaydır.  $S$  için matrisi

$$\begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

şeklinde yazabiliriz.  $S^*$  dönüşümünün matrisini ise standart tabana göre

$$\begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

şeklinde buluruz. Görüldüğü üzere  $\mathcal{M}(S) = \mathcal{M}(S^*)^T$  eşitliği sağlandı. Yani, matrisler aslında birbirinin transpozu. İlk örneğimizdeki matrisleri de simetrik matrisler, yani transpozu kendine eşit matrisler olarak bulabiliriz. Bu durum tesadüf mü? Her dönüşüm için bunu diyebilir miyiz? Cevap: Hayır! Bunu görmek için bu sefer karmaşık bir uzay üzerinde dönüşüm verelim.

Bir  $T(x, y) = (ix, x + y, iy)$  doğrusal dönüşümünü, burada  $i^2 = -1$  olmak üzere, tanımlayalım. Herhangi bir  $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$  ile standart iç çarpım uygulayalım:

$$\langle (ix, x + y, iy), (a, b, c) \rangle = ix\bar{a} + (x + y)\bar{b} + iy\bar{c} = x(i\bar{a} + \bar{b}) + y(i\bar{c} + \bar{b}).$$

Sağdaki ifadeyi  $(x, y)$  ile iç çarpım olarak ifade etmeye çalışalım. Önce biraz düzenleme yapmamız gerek.  $\bar{i} = -i$  eşitliğinden

$$x(i\bar{a} + \bar{b}) + y(i\bar{c} + \bar{b}) = x\overline{-ia + b} + y\overline{-ic + b}$$

yazabiliriz. Demek ki

$$\langle (ix, x + y, iy), (a, b, c) \rangle = \langle (x, y), (b - ai, b - ci) \rangle$$

yazabiliriz. Buradan  $T^*(a, b, c) = (b - ai, b - ci)$  çıkar. Şimdi standart tabana göre  $T$  dönüşümünün matrisine bakalım.

$$\mathcal{M}(T) = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & i \end{bmatrix}$$

Sıra geldi  $T^*$  dönüşümünün standart tabana göre matrisine:

$$\mathcal{M}(T^*) = \begin{bmatrix} -i & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -i \end{bmatrix}.$$

Matrisler yine birbirine oldukça benziyor, fakat kesinlikle birbirinin transpozunu değiller. Sanki matrisin her girdisinin önce eşleniği alınmış, sonra da transpozunu alınmış gibi bir durum var ortada. Yani  $a_{ij}$  girdisi ile  $\overline{a_{ji}}$  girdisi olarak yeni bir matris oluşturuluyor. Bu tür bir matrise **eşlenik transpoz matris** denir. Peki bu durumu genelleylebilir miyiz? Yani her dönüşümün eşleniğinin matrisi, dönüşümün matrisinin eşlenik transpozunu mudur? Cevap: Evet! Ama matrisi yazdığımız taban ortonormal ise. Şimdi bunu kanıtlayalım.

**Önsav 6.1.3.**  $T \in \text{Hom}(V, W)$  olsun. Ortonormal  $e = e_1, \dots, e_n$  ve  $f = f_1, \dots, f_m$  listeleri, sırasıyla  $V$  ve  $W$  uzaylarının tabanları olsun. O halde  $\mathcal{M}_{e,f}(T)$  matrisi ile  $\mathcal{M}_{f,e}(T^*)$  matrisleri birbirinin eşlenik transpozudur.

**Kanıt:** Matrisleri uzun uzun yazmamak için kısaca  $\mathcal{M}(T)$  ve  $\mathcal{M}(T^*)$  ifadelerini kullanacağız. Önsav 4.3.4'ü kullanarak her  $k = 1, \dots, n$  için

$$T(e_k) = \langle T(e_k), f_1 \rangle f_1 + \dots + \langle T(e_k), f_m \rangle f_m$$

yazabiliriz. Burada,  $\mathcal{M}(T)$  matrisinin  $k$ 'nci sütununun  $j$ 'inci satırı  $\langle T(e_k), f_j \rangle$  ile ifade edilmiş oldu. Şimdi  $\mathcal{M}(T^*)$  matrisinin  $j$ 'inci sütununun  $k$ 'nci satırına bakalım. Bu girdi  $\langle T^*(f_j), e_k \rangle$  sayısına eşittir. Son olarak

$$\langle T^*(f_j), e_k \rangle = \overline{\langle e_k, T^*(f_j) \rangle} = \overline{\langle T(e_k), f_j \rangle}$$

hesabını yapalım. Demek ki ilk matrisin  $a_{jk}$  girdisi ile diğer matrisin  $a_{kj}$  girdisinin kompleks eşleniği birbirine eşitmiş. Bu da teoremi kanıtlar.  $\square$

## 6.2 Özeşlenik Operatörler

Eşlenik operatörlerin özel bir hali ile ilgili konuşacağız. Eşlenik operatör tanımında  $V = W$  alacağız. Eğer  $T = T^*$  oluyorsa  $T$  dönüşümüne özeşlenik adı verilir. Bir örneğini önceki bölümde vermiştik. Bu tür dönüşümlerin matrislerinin, kendisinin karmaşık eşleniklerinin transpozlarına eşit olduğunu söyleyebiliriz. Bu tür matrislere **Hermitiyen matris** adı verilir. Özeşlenik operatörlerin reel sayılarla yakın bir ilişkisi vardır. Bu açıdan önemlidirler.

**Önsav 6.2.1.**  $V$  bir karmaşık iç çarpım uzayı olsun. O halde ancak ve ancak  $\langle T(v), v \rangle \in \mathbb{R}$  ise  $T$  özeşlenik olur.

**Kanıt:** Herhangi bir  $v \in V$  alalım.

$$\langle T^*(v), v \rangle = \langle v, T(v) \rangle = \overline{\langle T(v), v \rangle}$$

olduğunu not edelim. Şimdi,

$$\begin{aligned} T - T^* = 0 &\iff \langle (T - T^*)(v), v \rangle = 0, \forall v \in V \\ &\iff \langle T(v), v \rangle - \langle T^*(v), v \rangle = 0, \forall v \in V \\ &\iff \langle T(v), v \rangle - \overline{\langle T(v), v \rangle} = 0, \forall v \in V \\ &\iff \langle T(v), v \rangle = \overline{\langle T(v), v \rangle}, \forall v \in V \\ &\iff \langle T(v), v \rangle \in \mathbb{R}, \forall v \in V. \end{aligned}$$

□

Demek ki reel sayılarla özeşlenik operatörler arasında bir ilişki varmış. Bir  $v \neq 0$  vektörü sabitleyelim ve  $x = \langle T^*(v), v \rangle$  bağıntısını tanımlayalım. Burada  $\psi(x) = T^*(v)$  fonksiyonu, reel sayılarla özeşlenik operatörler arasında bir grup izomorfizması verir. Bunu birazdan kanıtlayacağız. Bize şimdi bir önsav daha lazım.

**Önsav 6.2.2.** Ancak ve ancak  $T = 0$  ise  $\langle T^*(v), v \rangle = 0$  olur.

Burada  $T$  özeşlenik bir operatör, bunu söylememize gerek kalmadı diye düşünüyoruz. Ayrıca bu önsav yardımıyla  $\ker \psi = 0$  buluruz. Bu da  $\psi$ 'nin birebirliğini verir. Şimdi bu son önsavı kanıtlayalım.

**Kanıt:** Öncelikle her  $u, w \in V$  için

$$\langle T(u), w \rangle = \frac{\langle T(u+w), u+w \rangle - \langle T(u-w), u-w \rangle}{4}$$

olduğunu gözlemleyelim.  $\langle T(u), w \rangle = \langle u, T(w) \rangle = \langle T(w), u \rangle$  olduğundan yukarıdaki ifadeyi açarak bu eşitliği rutin hesaplarla kanıtlayabiliriz. Eğer her  $v \in V$  için  $\langle T(v), v \rangle = 0$  ise yukarıdaki eşitlikte rahatlıkla  $\langle T(u), w \rangle = 0$  buluruz zira eşitliğin sağ tarafında paydada hep  $\langle T(v), v \rangle$  türünden elemanlar bulunuyor. Buradaki  $u, w$  keyfi olduğundan  $T = 0$  olmalıdır. Önermenin tersi ise bariz. Bu da teoremi kanıtlar. □

Özeşlenik operatörlerin kümesini  $\text{Adj}^*(V)$  ile gösterelim. Bu iki teoremden önemli bir sonuç çıkar.

**Sonuç 6.2.1.**  $\mathbb{R} \cong \text{Adj}^*(V)$  olur.

Özeşlenik operatörlerin reel sayılarla ilişkisi burada bitmiyor. Eğer  $T$  operatörü özeşlenik ise ve  $\lambda$  bu operatörün bir özdeğeri ise  $T(v) = \lambda v$  olmak üzere

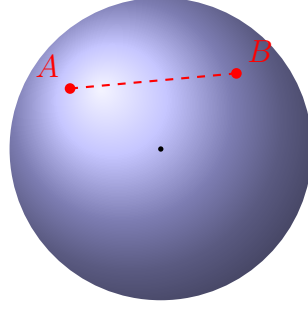
$$\lambda \|v\|^2 = \lambda \langle v, v \rangle = \langle \lambda v, v \rangle = \langle T(v), v \rangle = \langle v, T(v) \rangle = \langle v, \lambda v \rangle = \bar{\lambda} \langle v, v \rangle = \bar{\lambda} \|v\|^2$$

buluruz. Eşitliğin en sol ve en sağ tarafını eşitleyip her iki tarafı  $\|v\|^2$  ile bölersek ( $v \neq 0$  olmak zorunda olduğunu hatırlatalım)  $\lambda = \bar{\lambda}$  elde ederiz. O halde özeşlenik operatörlerin özdeğerleri de reel sayı olmalıymış. Bir önsav olarak kalsın burada.

**Önsav 6.2.3.** *Özeşlenik her operatörün özdeğerleri reel sayılardan oluşur.*

### 6.3 İzometriler

Bir top hayal edin. Topun üzerini iki farklı nokta ile işaretleyin. Şimdi kuvvetlice bu topa vurun. Top belki havada dönecek, şiddetlice sallanacak, en sonunda yere doğru sert bir iniş yapacak. O sırada belki de bir sürü darbe alacak. Bir top için oldukça normal bir serüven bu. Şimdi top yere düştükten sonra işaretlediğiniz noktaları inceleyin. Ne değişti? Hiçbir şey! Eğer kolayca dağılan bir mürekkep kullanmadıysan noktaların arasındaki mesafenin değişmediğini göreceksiniz. Halbuki o iki nokta havada bir sürü dönme ve öteleme hareketi yaptı. Ne var ki dönme ve öteleme hareketleri, noktalar arasındaki mesafeyi değiştirmez. Bir metrik uzay üzerindeki bu tür bir dönüşüm, özel bir isim alır: **İzometri**.



Topun üzerine işaretlenmiş iki nokta

**Tanım.**  $(X, d)$  bir metrik uzay olsun. Eğer  $T : X \rightarrow X$  dönüşümü ve her  $x, y \in X$  için

$$d(T(x), T(y)) = d(x, y)$$

oluyorsa, yani dönüşüm uygulandıktan sonra mesafe değişmiyorsa  $T$ 'ye bir **izometri** adı verilir.

Kartezyen düzlemde öteleme, dönme ve yansıma dönüşümleri birer izometri örneği olarak verilebilir. İki boyutlu reel sayı düzleminde bir öteleme dönüşümü

$$T(x, y) = (a + x, b + y)$$

kuralı ile verilebilir. Öklid metriğinde bu bir izometridir. Bunu görmek için

$$\begin{aligned} d((x, y), (s, t)) &= \sqrt{(x - s)^2 + (y - t)^2} = \sqrt{(x + a - s - a)^2 + (y + b - t - b)^2} \\ &= d((x + a, y + b), (s + a, t + b)) = d(T(x, y), T(s, t)) \end{aligned}$$

gibi basit bir hesap yapabiliriz. İzometrilerin yapıları gereği birebir olmaları gerekir. Zira eğer iki nokta arasındaki mesafe sıfır değil ise, dönüşümden sonra da sıfır olmamaları gerekir. Demek istediğimizi biraz açalım.

**Önsav 6.3.1.** Her izometri birebirdir.

**Kanıt:**  $(X, d)$  bir metrik uzay ve  $T : X \rightarrow X$  bir izometri olsun. O halde

$$T(x) = T(y) \iff d(T(x), T(y)) = 0 \iff d(x, y) = 0 \iff x = y$$

olmalıdır. Demek ki  $x = y$ . □

**Önsav 6.3.2.**  $(X, d)$  bir metrik uzay ve  $C \subseteq X$  kapalı bir küme olsun. O halde  $T^{-1}(C)$  kümesi de kapalıdır.

**Kanıt:** Burada  $T^{-1}(C) = \{x \in X : f(x) \in C\}$  anlamına geldiğini hatırlatmak isteriz.  $C$  boş ise kanıtlanacak bir şey yok,  $C \neq \emptyset$  olsun.  $T^{-1}(C)$  üzerinde yakınsak bir  $(a_n)$  dizisi alalım. Dizinin limiti  $a$  olsun. Tanımı tekrar yazmak gerekirse her  $\varepsilon > 0$  için  $d(a_n, a) < \varepsilon$  eşitliğini her  $n > N$  için sağlayacak bir  $N$  doğal sayısının varlığından söz edebiliriz. Demek ki aynı şekilde  $d(T(a_n), T(a)) < \varepsilon$  olacak şekilde gerekli  $N$  doğal sayımız da varmış, zira her  $n > N$  için  $d(T(a_n), T(a)) = d(a_n, a) < \varepsilon$  olur. Demek ki  $b_n = T(a_n)$  kuralı ile tanımlı dizi  $T(a)$ 'ya yakınsıyor olmalı. Fakat  $C$  kapalı olduğundan  $T(a) \in C$  olmalı. Buradan ve ilk başta verdiğimiz tanımdan  $a \in T^{-1}(C)$  olmalıymış.  $C$  kümesi üzerinde keyfi bir  $(a_n)$  dizisinin limiti yine aynı küme içinde çıkmış oldu. Demek ki  $T^{-1}(C)$  kapalı bir kümedir. □

**Sonuç 6.3.1** (Topoloji Bilenler İçin Sonuç). *Her izometri süreklidir.*

Bu teoremden doğma sezgimiz odur ki eğer  $A \subseteq X$  altkümesi bir kare ise  $T(A)$  kümesi de bir kare olmalıdır. Ya da  $C$  bir daire ise  $T(C)$  de bir daire olmalıdır. Yani izometrilerin şekilleri koruduğunu sezebiliriz. Bunu daha iyi anlamak için açılarla da çalışabiliriz. Dördüncü bölümde açılar iç çarpım ile ifade etmiştik. Dolayısıyla izometrilere iç çarpım uzayları ve normlu uzaylar üzerinde tanımlamak isteyebiliriz.

**Tanım.**  $V, W$  normlu uzaylar olsun. Eğer bir  $T : V \rightarrow W$  doğrusal dönüşümü ve her  $v \in V$  için  $\|T(v)\| = \|v\|$  oluyorsa  $T$ 'ye bir **izometri** denir.

Bu tanım, bildiğimiz metrik uzaydaki izometri tanımı ile birebir uyuyor. Zira  $\|x - y\| = \|T(x) - T(y)\|$  koşulunu vermek ile  $\|z\| = \|T(z)\|$  koşulunu vermek açısından hiçbir fark yoktur. Bu tanım üzerinden izometrilere karakterize etmeye çalışalım.

**Teorem 6.3.1.**  $V$  bir iç çarpım uzayı ve  $T : V \rightarrow W$  bir doğrusal dönüşüm olsun. O halde aşağıdaki önermeler denktir:

- i.  $T$  bir izometridir,
- ii.  $T^* \circ T = Id_V$ ,
- iii. Her  $u, w \in V$  için  $\langle u, w \rangle = \langle T(u), T(w) \rangle$ ,
- iv. Eğer  $e_1, \dots, e_n$  ortonormal bir liste ise  $T(e_1), \dots, T(e_n)$  ortonormaldir.

**Kanıt:** (i)  $\implies$  (ii).  $T$  bir izometri olsun.  $Id_V - T^* \circ T = 0$  olduğunu göstereceğiz. Herhangi bir  $v \in V$  alalım:

$$\begin{aligned} \langle (Id_V - T^* \circ T)(v), v \rangle &= \langle v, v \rangle - \langle T^*(T(v)), v \rangle \\ &= \|v\|^2 - \langle T(v), T(v) \rangle = \|v\|^2 - \|T(v)\|^2 = \|v\|^2 - \|v\|^2 = 0 \end{aligned}$$

olmalıdır. Önsav 6.2.2'den  $Id_V - T^* \circ T = 0$  olur.

(ii)  $\implies$  (iii) Burası kolaydır, zira her  $u, w \in V$  için

$$\langle T(u), T(w) \rangle = \langle T^*(T(u)), w \rangle = \langle u, w \rangle$$

sağlanır.

(iii)  $\implies$  (iv) İç çarpım korunduğu için rahatça

$$\delta_{i,j} = \langle e_i, e_j \rangle = \langle T(e_i), T(e_j) \rangle$$

yazabiliriz.

(iv)  $\implies$  (i) Bu sefer  $e_1, \dots, e_n$  bir taban olsun.  $T(e_1), \dots, T(e_n)$  ortonormal olduğundan görüntü kümesinin tabanıdır. eşitliğini kullanarak her  $u \in V$  için

$$\|u\|^2 = \sum_{i=1}^n |\langle u, e_i \rangle|^2$$

yazabiliriz. Ayrıca

$$u = \sum_{i=1}^n \langle u, e_i \rangle e_i$$

eşitliğinde her iki tarafın  $T$  altında görüntüsünü alarak

$$T(u) = \sum_{i=1}^n \langle u, e_i \rangle T(e_i)$$

elde ederiz. Bu da demek oluyor ki

$$\|T(u)\|^2 = \sum_{i=1}^n |\langle u, e_i \rangle|^2$$

. Buradan  $\|T(u)\|^2 = \|u\|^2$  gözlemini yapabiliriz, ki bu da tam olarak istediğimiz şeyi verir.  $\square$

Elbette biri çıkıp izometrilere matrislerini yazmak isteyebilir. Bu durumda yapılabilecek en iyi şeylerden biri ortonormal tabanları kullanarak matris yazmaya çalışmaktır. Düşünecek olursanız, önceki teoreme göre izometrilere ortonormal bir taban yine ortonormal bir sisteme gömülür. Yani  $e_1, \dots, e_n$  ortonormal ise  $T(e_1), \dots, T(e_n)$  de ortonormaldir. Şimdi  $f_1, \dots, f_m \in W$  ortonormal bir taban olsun.  $\mathcal{M}_{e,f}(T)$  matrisinin girdilerini inceleyelim:

$$\begin{aligned} \langle T(e_i), T(e_j) \rangle &= \langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}, \\ \langle T(e_i), T(e_j) \rangle &= \left\langle \sum_{k=1}^m a_{ik} f_k, \sum_{k=1}^m a_{jk} f_k \right\rangle = \sum_{k=1}^m a_{ik} \overline{a_{jk}} \delta_{ij} = \sum_{k=1}^m a_{ik} \overline{a_{jk}} \end{aligned} \quad (1)$$

denklemlerinden ötürü standart iç çarpıma göre  $\mathcal{M}_{e,f}(T)$  matrisinin sütun vektörleri ortonormal bir sistem olmak zorundadır. Yani izometrilere ortonormal tabanlarına göre matrislerini yazarsak sütun vektörleri de ortonormal olmak zorundadır. Böylece izometrilere için matris karakterizasyonu da yapmış olduk. Bu matrisin tersinir olması için matrisin kare matris olması, yani  $\dim V = \dim W$  olması gerek ve yeter şarttır. Önsav 6.3.1 zaten izometrilere birebir olduğunu söylüyor. Ee, o halde  $\dim V = \dim W$  ise Teorem 3.2.4'ten ötürü birebir bu izometrilere izomorfizma olmalıdır.

**Tanım.** Örtün izometrilere **üniter operatör** adı verilir. Üniter operatörlerin ortonormal tabanlarına göre yazılan matrislerine **üniter matris** denir.

Üniter matrisleri bazı kitaplar  $A^{-1} = A^*$  ( $A^*$  burada eşlenik transpozunu temsil ediyor) özelliğini sağlayan matrisler olarak da tanımlarlar. Teorem 6.3.2'de bunun sebebini göreceğiz.

**Önsav 6.3.3.** Her üniter matrisin sütun vektörleri, standart iç çarpıma göre ortonormal bir sistem oluşturur.

Bu önsavın kanıtını yukarıda yapmış olduk zaten. Buna tekrar değinmemeyelim. Şimdi Teorem 6.3.1'i üniter operatörlere genişleteceğiz.

**Teorem 6.3.2.**  $V$  bir iç çarpım uzayı ve  $T : V \rightarrow W$  bir doğrusal dönüşüm olsun. O halde aşağıdaki önermeler denktir:

- i.  $T$  üniter operatördür,
- ii.  $T^* = T^{-1}$ ,
- iii. Eğer  $e_1, \dots, e_n$  ortonormal bir liste ise  $T(e_1), \dots, T(e_n)$  ortonormal bir tabandır.
- iv.  $S^*$  üniter bir operatördür.

**Kanıt:**  $T$  üniter olsun. O halde Teorem 6.3.1'in ikinci maddesinden ötürü  $T^* \circ T = Id_V = T^{-1} \circ T$  çıkar. Eşitliğin sağ ve sol tarafında her iki tarafın sağdan  $T^{-1}$  ile bileşkesini alırsak istediğimiz çıkar. Geri kalan önermelerin denkliliği bariz.  $\square$

**Önsav 6.3.4.** Üniter operatörlerin her  $\lambda$  özdeğeri için  $|\lambda| = 1$  olur.

**Kanıt:**  $T$  üniter bir operatör ve  $v \neq 0$  için  $T(v) = \lambda v$  olsun.

$$|\lambda|\|v\| = \|\lambda v\| = \|T(v)\| = \|v\|$$

eşitliğinden istediğimiz çıkar. □

Daha öncesinde üst-üçgensel matrislerin doğrusal denklem sistemi çözümlerinde ne kadar kullanışlı olabileceğinden bahsetmiştik. Matris üzerinden denklem çözerken matrisi üst-üçgensel hale getirmek kadar matrisi üst-üçgensel bir çarpana ayırmak da yararlı olabiliyor. Hatta en iyisi, alt-üçgensel matris, yani köşegenin üst tarafında kalan girdilerinin 0 olduğu kare matris, ile çalışabiliriz. Cholesky çarpanlaması olarak bilinen bir algoritma yardımıyla bazı  $A$  matrislerini,  $L$  alt-üçgensel,  $U$  üst-üçgensel olacak şekilde  $A = LU$  şeklinde çarpanlara ayırabiliyoruz. Bu tür çarpanlara ayırmaların varlığını kanıtlamak için üniter operatörleri kullanacağız. Sıradaki teorem bunlardan bir tanesi.

**Önsav 6.3.5.**  $A$  bir kare matris öyle ki sütun vektörleri doğrusal bağımsız olsun.  $O$  halde  $Q$  üniter matris ve  $R$  köşegen girdileri pozitif sayılardan oluşan üst-üçgensel matris olmak üzere

$$A = QR$$

şeklinde tek türlü bir çarpanlara ayırma vardır.

**Kanıt:** Önce varlığı kanıtlayalım.  $A$ 'nın sütun vektörlerine  $v_1, \dots, v_n$  diyelim. Teorem 4.3.5 algoritmasını kullanarak bu sistemi  $e_1, \dots, e_n$  ortonormal sistemine dönüştürebiliriz.  $R$ 'nin girdileri  $r_{ij}$  olmak üzere

$$r_{ij} := \langle v_j, e_i \rangle$$

tanımını yapalım. Burada  $i < j$  ise  $v_j$  ile  $e_i$  vektörü diktir. Dolayısıyla  $\langle v_j, e_k \rangle = 0$  olur.

$Q$  matrisini de sütunları  $e_1, \dots, e_n$  olan matris olarak yazalım. Böylece  $A$ 'nın  $k$ 'inci sütununu

$$v_k = \sum \langle v_k, e_i \rangle e_i$$

olarak yazabileceğimizden ötürü  $A = QR$  buluruz. Gramm-Schmidt algoritmasına dönecek olursak

$$\langle v_n, e_n \rangle = \left\langle v_n, \frac{v_n - \sum_{i=1}^{n-1} \langle v_n, e_i \rangle e_i}{\|v_n - \sum_{i=1}^{n-1} \langle v_n, e_i \rangle e_i\|} \right\rangle = \frac{1}{\|v_n - \sum_{i=1}^{n-1} \langle v_n, e_i \rangle e_i\|} \left( \langle v_n, v_n \rangle - \langle v_n, \sum_{i=1}^{n-1} \langle v_n, e_i \rangle e_i \rangle \right)$$

hesabını yapabiliriz. Bessel eşitsizliğinden ötürü (Teorem 4.3.7)  $\langle v_n, v_n \rangle > \langle v_n, \sum_{i=1}^{n-1} \langle v_n, e_i \rangle e_i \rangle$  olmalıdır. Pay ve payda pozitif olduğundan  $\langle v_n, e_n \rangle$  sayısı pozitif olmalıdır. Bu da bize köşegen girdilerinin pozitifliğini verir.

Şimdi tekliği gösterelim.  $Q$ 'nun yazımındaki  $e_1, \dots, e_n$  vektörlerinin seçimi tek türlüdür. Nasıl mı? Eğer  $f_1, \dots, f_n$  başka bir ortonormal taban olsaydı genelliği bozmadan

$$f_1 = \langle e_1, f_1 \rangle e_1, \quad e_1 = \langle e_1, f_1 \rangle f_1$$

yazardık. Buradan

$$e_1 = \langle e_1, f_1 \rangle^2 e_1$$

elde edilirdi ki bu da  $\langle e_1, f_1 \rangle = 1$  demektir ki bu da  $e_1 = f_1$  demek. Bu katsayıların tek türllüğü bize  $Q$  ve  $R$  matrislerinin tek türllüğünü verir.  $\square$

Bu kanıt yalnızca bir varlık göstermiyor, aynı zamanda bize bir yöntem de veriyor. Örneğin,

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

matrisini ele alalım. Burada  $v_1 = (2, 1)$  ve  $v_2 = (1, 2)$  olarak ortonorma sistemimizdeki ilk vektörümüzü

$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(2, 1)$$

olarak yazalım. İkinci vektörün pay kısmını

$$v_2 - \langle v_2, e_1 \rangle e_1 = (1, 2) - \frac{4}{\sqrt{5}} \left( \frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}} \right) = \left( \frac{-3}{5}, \frac{6}{5} \right)$$

olarak bulabiliriz. Vektörü kendi normuna bölerek

$$e_2 = \left( \frac{-1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}} \right)$$

şeklinde buluruz.  $Q$  matrisini bulduk:

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}.$$

$R$  matrisini bulmak için  $\langle v_j, e_i \rangle$  türünden iç-çarpımları bulmamız gerekiyor. Hesapladığımızda ise

$$R = \begin{bmatrix} \frac{5}{\sqrt{5}} & \frac{4}{\sqrt{5}} \\ 0 & \frac{3}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

buluruz.  $A = QR$  olduğunun doğrulamasını okura bırakıyoruz. Daha öncesinde bahsettiğimiz Cholesky çarpanları ise matrisin **pozitif-tanımlı** olduğu durumda gerçekleşir. Peki nedir pozitif-tanımlı matris? Bunun için pozitif operatörlere göz atmak gerekir.

**Tanım.**  $T$  bir özleşlenik operatör olsun. Eğer her  $v$  vektörü için

$$\langle T(v), v \rangle \geq 0$$

oluyorsa  $T$ 'ye **pozitif operatör** adı verilir. Eğer bu koşulu " $>$ " ile değiştirirsek bu operatöre **pozitif-tanımlı operatör** denir. Pozitif operatörlerin matrislerine **pozitif-tanımlı matris** denir.

Pozitif operatörlerin özdeğerleri negatif olmayan reel sayılardır. Eğer  $v \neq 0$  bir özvektör ise  $0 \leq \langle T(v), v \rangle = \langle \lambda v, v \rangle = \lambda \|v\|^2$  olduğundan  $\lambda > 0$  buluruz. Eğer elinizde özdeşlik bir operatör varsa buradan pozitif bir operatör bulmak mümkündür. Zira  $\langle T^*T(v), v \rangle = \langle T(v), T(v) \rangle \geq 0$  olduğundan  $T^*T$  operatörü pozitifdir.

Pozitif tanımlı  $B$  matrisleri her  $x$  sütun vektörü için  $\langle Bx, x \rangle > 0$  özelliğini sağlayan Hermityen matrisler olarak tanımlayabiliriz. Bundan böyle bir  $A$  matrisin eşlenik transpozunu  $A^*$  ile göstereceğiz.

**Teorem 6.3.3** (Cholesky). *A tersinir bir pozitif-tanımlı matris olsun. Tek türlü, köşegen girdileri pozitif olan öyle bir  $U$  matrisi vardır ki  $A = U^*U$  olur.*

Buradaki  $U^*$  matrisinin  $U$  ile eşlenik transpoz olduğunu hatırlayalım. Yani  $U$  üst-üçgensel ise  $U^*$  alt-üçgenseldir. Bu teoremin kanıtını bir sonraki altbölümde yapacağız.

## 6.4 Spektral Teorem

Daha önceki bölümlerde bir doğrusal dönüşümün özvektörlerinden ve bu özvektörlerin doğrusal bağımsız olduğundan bahsetmiştik. Özvektörlerden en fazla uzayın boyutu kadar olması gerektiğini biliyoruz. "En fazla" diyoruz, çünkü minimal polinomun çakışık kökleri olabilir ve olması gerekenden daha az birbirinden farklı özvektör bulabiliriz. Bu durumda yine de özvektörleri bir tabana tamamlayarak her doğrusal dönüşümün özvektörlerini içeren bir taban bulabiliriz. Ne var ki bu bizim için yeterli değil, amacımız özdeğerleri içeren ortogonal bir taban bulmak.

İlk durumda reel iç çarpım uzaylarını inceleyeceğiz. Bu durumda dönüşümlerin minimal polinomlarının katsayıları da reel sayılardan oluşmalıdır. Reel polinomlarla ilgili:

- Eğer  $z \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$  ve  $z$  bir doğrusal dönüşümün karakteristik polinomunun bir kökü ise onun karmaşık eşleniği olan  $\bar{z}$  sayısı da bu polinomun bir köküdür. Bu durumda  $z = a + bi$  yazarsak  $(x - z)(x - \bar{z}) = x^2 - 2ax + (a^2 + b^2)$  polinomunun söz konusu dönüşümün karakteristik polinomunu bölmesini bekleriz.
- Eğer  $r \in \mathbb{R}$  bir doğrusal dönüşümün karakteristik polinomunun kökü ise  $(x - r)$  polinomu, o karakteristik polinomu bölüyor olmalı.

olgularından bahsedebiliriz. Böylece reel karakteristik polinomların

$$(x - r_1)(x - r_2)\dots(x - r_m)(x^2 - a_1x + b_1)(x^2 - a_2x + b_2)\dots(x^2 - a_nx - b_n)$$

yapısında olmasını bekleriz. Hoş! çünkü bu olgu, bütün reel polinomlar için geçerli bir olgudur. Nitekim soyut cebirde de eğer  $\deg P(x) \geq 3$  ise  $P(x)$  polinomunun indirgenebilir olduğunu, yani derecesi 1'den büyük birden fazla monik polinom tarafından bölünebildiğini söyleriz. Eğer reel polinomları incelemek istiyorsak birinci ve ikinci dereceden çarpanları incelememiz yeterli olur. Bir sonraki önsavda bunu yapacağız.

**Önsav 6.4.1.** *Bir özdeşlik  $T \in \text{End}(V)$  operatörü alalım;  $b, c \in \mathbb{R}$  olsun öyle ki  $b^2 < 4c$ .  $O$  halde*

$$T^2 + bT + c(\text{Id})$$

*operatörü tersinirdir.*

**Kanıt:** Sıfırdan farklı bir  $v \in V$  vektörü alalım.  $\langle T^2 + bT + c(\text{Id})(v), v \rangle > 0$  eşitliğini gösterip Önsav 6.2.2'yi kullanacağız. Böylece  $T(v) \neq 0$  bulacağız. Buradan  $\ker T = \{0\}$  çıkar ve böylece birebirliği kanıtlamış oluruz. Teorem 3.2.4'ten kanıt tamamlanmış olur.

$$\begin{aligned}
\langle T^2 + bT + c(Id)(v), v \rangle &= \langle T^2(v), v \rangle + b\langle T(v), v \rangle + c\langle v, v \rangle \\
&= \langle T(v), T(v) \rangle + b\langle T(v), v \rangle + c\langle v, v \rangle \\
&= \|T(v)\|^2 + b\langle T(v), v \rangle + c\|v\|^2 \\
&\geq \|T(v)\|^2 + |b|\|T(v)\|\|v\| + c\|v\|^2 \\
&= \|T(v)\|^2 + |b|\|T(v)\|\|v\| + \frac{|b|^2\|v\|^2}{4} - \frac{|b|^2\|v\|^2}{4} + c\|v\|^2 \\
&= \left( \|T(v)\| + \frac{|b|\|v\|}{2} \right)^2 + \left( \frac{4c - b^2}{4} \|v\|^2 \right) \\
&> 0.
\end{aligned}$$

Bu denklemde ilk eşitsizliği Cauchy-Schwarz eşitsizliğinden ötürü yazabildik. Buradan kanıt bitmiş olur.  $\square$

**Önsav 6.4.2.** *Bir  $T$  özeşlenik operatörü alalım. Bu operatörün minimal polinomu ayrılabilir. Diğer bir deyişle  $z_1, \dots, z_k \in \mathbb{R}$  için*

$$(x - z_1)(x - z_2)\dots(x - z_k)$$

şeklindedir.

**Kanıt:** Eğer uzay karmaşık katsayılı ise Önsav 6.2.3'ten ötürü istediğimiz gelir. Uzayı reel kabul edelim.  $\det(T - \lambda Id)$  polinomunu

$$(x - \lambda_1)\dots(x - \lambda_m)(x^2 + b_1x - c_1)\dots(x^2 + b_nx + c_n)$$

şeklinde ifade edelim öyle ki  $b_i^2 - 4c_i < 0$  olsun. Şimdi  $x$  yerine  $T$  yazalım. Her iki tarafı  $(T^2 + b_iT + c_i)^{-1}$  ile bölebiliriz. Demek ki hala daha

$$(T - \lambda_1 Id)\dots(T - \lambda_m Id) = 0$$

olur. Demek ki bütün özdeğerler  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  olmalıymış. O halde  $T$ 'nin minimal polinomu

$$(x - \lambda_1)\dots(x - \lambda_m)$$

ifadesinden ibaretmiş.  $\square$

**Teorem 6.4.1** (Reel Spektral Teorem).  *$V$  bir reel iç-çarpım uzayı ve  $T \in \text{End}(V)$  olsun. O halde aşağıdaki önermeler eşdeğerdir:*

- i.  $T$  özeşleniktir,
- ii.  $T$ 'nin ortonormal bir tabana göre yazılmış bir köşegen matrisi vardır.
- iii.  $T$ 'nin özvektörlerini içeren  $V$ 'nin ortonormal bir tabanı vardır.

**Kanıt:** (i)  $\implies$  (ii).  $T$  özeşlenik olsun. Önsav 6.4.2'den ve Önsav 5.3.3'ten ötürü  $T$ 'nin üst-üçgensel bir matrisini yazabiliriz. Hatta bu matrisi yazdığımız tabanı ortonormalleştirebiliriz. Matris reel olduğu için  $T^* = T^t$  yazabiliriz. Ayrıca  $T$  özeşlenik olduğundan  $T = T^*$  olmalıdır. Demek ki  $T$ 'nin matrisi hem üst-üçgensel hem de alt-üçgensel olmalıdır, sonuç olarak  $T$ 'nin matrisi bir köşegen matristir.

(ii)  $\implies$  (i).  $T$ 'nin matrisi köşegen olsun. Girdiler reel olduğundan  $T^t = T = T^*$  sonucuna ulaşırız.

(ii)  $\implies$  (iii) Köşegen matrisi yazalım. Özdeğerler bu matrisin sıfırdan farklı girdileridir. O halde bu ortonormal taban özvektörleri içerir. (iii)  $\implies$  (i) önermesi ise bariz.  $\square$

Karmaşık uzaylar için bu teoremi yazmak biraz daha karışık. Karmaşık sayılarda özeşleniklik koşulu yeterli olmuyor, daha kapsayıcı bir tanım gerekiyor.

**Tanım.** Bir  $T$  dönüşümü için  $T \circ T^* = T^* \circ T$  oluyorsa  $T$ 'ye **normal operatör** denir.

**Önsav 6.4.3.**  $T$  normaldir ancak ve ancak her  $v$  vektörü için  $\|T^*(v)\| = \|T(v)\|$  ise.

**Kanıt:**  $T \circ T^* = T^* \circ T$  olsun. Her  $v \in V$  için;

$$\begin{aligned} 0 &= \langle 0, v \rangle \\ &= \langle (T \circ T^* - T^* \circ T)(v), v \rangle \\ &= \langle (T \circ T^*)(v), v \rangle - \langle T^* \circ T(v), v \rangle \\ &= \langle T^*(v), T^*(v) \rangle - \langle T(v), T(v) \rangle \\ &= \|T^*(v)\|^2 - \|T(v)\|^2 \end{aligned}$$

En sağ ve en sol tarafı eşitlersek istediğimiz önermeyi kanıtlamış oluruz.  $\square$

Bariz bir şekilde her özeşlenik operatör normaldir zira

$$T \circ T^* = T^2 = T^* \circ T$$

olur.

**Önsav 6.4.4.**  $T$  normal olsun. O halde  $T - \lambda Id$  dönüşümü de normaldir.

**Kanıt:**  $(T^* - \bar{\lambda} Id) = (T - \lambda Id)^*$  olduğunu hatırlatarak:

$$\begin{aligned} (T - \lambda Id) \circ (T^* - \bar{\lambda} Id) &= T \circ T^* - \bar{\lambda} T - \lambda T^* = \lambda \bar{\lambda} Id \\ &= T^* \circ T - \bar{\lambda} T - \lambda T^* = \lambda \bar{\lambda} Id \\ &= (T^* - \bar{\lambda} Id) \circ (T - \lambda Id) \\ &= (T - \lambda Id)^* \circ (T - \lambda Id) \end{aligned}$$

hesabımı direkt olarak yapalım. Burada kanıt biter.  $\square$

Artık kompleks spektral teoremi verebiliriz.

**Teorem 6.4.2.**  $V$  karmaşık bir uzay olsun ve  $T \in \text{End}(V)$  olsun. O halde aşağıdaki önermeler eşdeğerdir:

- i.  $T$  normaldir,
- ii.  $T$ 'nin ortonormal bir tabana göre yazılmış bir köşegen matrisi vardır,
- iii.  $T$ 'nin özvektörlerini içeren  $V$ 'nin ortonormal bir tabanı vardır.

**Kanıt:**  $T$  normal olsun.  $T$ 'nin üst-üçgensel bir matrisini elbette yazabiliriz. Şimdi yazdığımız tabanı ortonormalleştirelim. Bu tabana  $e_1, \dots, e_n$  diyelim. Oluşturduğumuz matrisin girdilerini  $a_{ij}$  ile ifade edelim.  $T$  normal olduğundan,

$$\begin{aligned}\|T(e_1)\|^2 &= |a_{11}|^2 \\ \|T^*(e_1)\|^2 &= |a_{11}|^2 + |a_{12}|^2 + \dots + |a_{1n}|^2\end{aligned}$$

yazalım. Fakat  $T$  normal olduğundan  $\|T(e_1)\| = \|T^*(e_1)\|$  olmalıdır. Buradan

$$|a_{12}|^2 + \dots + |a_{1n}|^2 = 0$$

çıkar. Bu da demek oluyor ki her  $i > 1$  için  $|a_{1i}| = 0$  oluyor. Böylecene devam ederek  $T^*$  matrisinin üst-üçgensel olduğu sonucuna varırız. Demek ki  $T^*$  ve  $T$  matrisleri ikisi birden üst-üçgenseldir. Buradan  $T$ 'nin matrisinin köşegen matris olduğu sonucuna varırız. Şimdi tersini kanıtlamak için  $T$ 'nin ortonormal bir tabana göre köşegen matrisini yazalım. Bu matrise  $M$  diyelim. O halde  $M^*$  matrisi de köşegendir. Her köşegen matris için

$$MM^* = M^*M$$

olduğundan  $T \circ T^* = T^* \circ T$  olmalıdır. Bu da (ii)  $\implies$  (i) önermesini kanıtlar.

Genel tanımlardan (iii)  $\iff$  (ii) eşdeğerliği gelir. □

Spektral teorem sayesinde pozitif operatörlere eşdeğer koşullar verebiliriz. Daha sonrasında da Cholesky çarpanlamasını kanıtlayabileceğiz.

**Tanım.**  $T$  bir pozitif operatör ve  $R^2 = T$  olacak şekilde bir  $R$  operatörümüz olsun.  $R$ 'ye  $T$ 'nin **karekökü** adı verilir. Tahmin edilebileceği üzere bu karekök  $\sqrt{R}$  ile gösterilir.

Bir sonraki teorem, pozitif operatörlerle ilgili hemen hemen her şeyi söyleyecektir.

**Teorem 6.4.3.**  $T \in \text{End}(V)$  olsun. Takip eden önermeler denktir:

- i.  $T$  bir pozitif operatördür,
- ii.  $T$  özdeşlik olup tüm özdeğerleri negatif olmayan reel sayılardır,
- iii.  $V$ 'nin bir ortonormal tabanı için  $T$ 'nin negatif olmayan köşegen girdileri olan bir köşegen matrisi vardır,

iv.  $T$ 'nin pozitif bir karekökü vardır,

v.  $T$ 'nin özdeşlik bir karekökü vardır,

vi. Bir  $R \in \text{End}(V)$  için  $T = R^* \circ R$  olur.

**Kanıt:** (i)  $\implies$  (ii).  $T$  pozitif olsun. Tanımdan ötürü  $T = T^*$  sağlamıyor.  $T$  özdeşlik olduğundan  $T$ 'nin özdeğerleri reel sayılardan oluşur. Pozitifliği kanıtlayalım. Bir  $\lambda$  özdeğeri ve  $v \in V$  için

$$0 \leq \langle T(v), v \rangle = \langle \lambda v, v \rangle = \lambda \langle v, v \rangle$$

olur. Buradan  $\lambda \geq 0$  çıkar.

(ii)  $\implies$  (iii). (ii) önermesini kabul edelim. Özdeşlik olan  $T$  operatörü normaldir. Dolayısıyla spektral teoremden  $T$ 'nin özvektörlerini içeren ortonormal bir taban bulabiliriz. Bu tabana göre  $T$ 'yi matrisleştirmek aradığımız matrisi verir.

(iii)  $\implies$  (iv).  $T$ 'nin köşegen girdileri negatif olmayan  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  sayıları olan bir matrisi vardır. Şimdi köşegen girdileri  $\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n}$  olan bir matris alıp bu matrise karşılık gelen dönüşümü alalım. Bu dönüşüm,  $T$ 'nin kareköküdür (Bunu kanıtlayın).

(iv)  $\implies$  (v).  $T$ 'nin pozitif bir karekökü  $R$  olsun. Fakat  $R$  pozitif olduğundan tanım gereği özdeşliktir.

(v)  $\implies$  (vi).  $T$ 'nin bir özdeşlik  $R$  karekökü vardır. Dolayısıyla  $T = R^*$  eşitliğinden ötürü

$$T = R^2 = R^* \circ R = R \circ R^*$$

yazabiliriz.

(vi)  $\implies$  (i). Bir  $R \in \text{End}(V)$  için  $T = R^* \circ R$  olsun. O halde her  $v \in V$  için,

$$\langle T(v), v \rangle = \langle R^*(R(v)), v \rangle = \langle R(v), R(v) \rangle \geq 0$$

hesabından bunu da rahatça kanıtlamış oluruz. □

Artık Cholesky çarpanlamasını kanıtlayabiliriz.

**Teorem 6.3.3'ün Kanıtı.**  $A$  pozitif tanımlı bir matris olsun. O halde Teorem 6.4.3'ün (vi)  $\iff$  (i) maddesinden ötürü bir  $B$  matrisi için  $A = B^*B$  olur.  $B$ 'yi  $QR$ -çarpanlama ile ayıralım

$$B = QR$$

olsun öyle ki  $Q$  üniter ve  $R$  pozitif köşegen girdili üst-üçgensel bir matris olsun. Yerine yazarak ve  $Q^* = Q^{-1}$  eşitliğini kullanarak (Teorem 6.3.2);

$$B = (QR)^*(QR) = R^*Q^*(QR) = R^*R$$

elde ederiz. Burada  $R$  üst-üçgensel olduğundan  $R^*$  alt-üçgenseldir ve bu da istediğimizi kanıtlar. Tek türlülük ise  $QR$ -çarpanlamasının  $R$  matrisinin seçimindeki tek türlülüğten gelir.  $\square$

Bir örnek yapalım.

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$

Öncelikle  $\det A = 9 \neq 0$  olduğundan  $A$  matrisi tersinirdir.  $A$ 'nın pozitif-tanımlılığını gösterelim. Bunun için herhangi bir  $v = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$  sütun matrisi ele alalım. Şimdi  $\langle Av, v \rangle$  değerini hesaplayalım. Adım adım gidelim. Önce  $Av$  vektörünü bulacağız.  $v \neq 0$  olsun.

$$Av = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5x + 4y \\ 4x + 5y \end{bmatrix}$$

Şimdi iç çarpımı hesaplayabiliriz:

$$\left\langle \begin{bmatrix} 5x + 4y \\ 4x + 5y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right\rangle = (5x^2 + 4xy) + (4xy + 5y^2) = (x^2 + y^2) + (2x + 2y)^2 > 0$$

Buradan  $A$ 'nın pozitif-tanımlı ve tersinir olduğu çıkar. Şimdi Cholesky çarpanlaması uygulayabiliriz. İstersek bu matrisi

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^2$$

olarak yazabiliriz. Burada  $\sqrt{A}$  ile göstereceğimiz  $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$  matrisinin sütun vektörleri doğrusal bağımsız olduğundan  $QR$ -çarpanlama uygulayabiliriz. Fakat bunları zaten

$$Q = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

ve

$$R = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

olarak önceki altbölümde hesaplamıştık. Teoreme göre  $A = R^*R$  olmalı. Bunu kontrol edebilirsiniz:

$$\begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} = \left( \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \right) \left( \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \right)$$

## References

- [1] Sheldon Axler, *Linear Algebra Done Right*, 4th ed., Springer, 2023. <https://linear.axler.net/LADR4e.pdf>
- [2] David Hunter, *Chapter 6: Inner Product Spaces*, Department of Mathematics, UC Davis, 2006. <https://www.math.ucdavis.edu/~hunter/book/ch6.pdf>