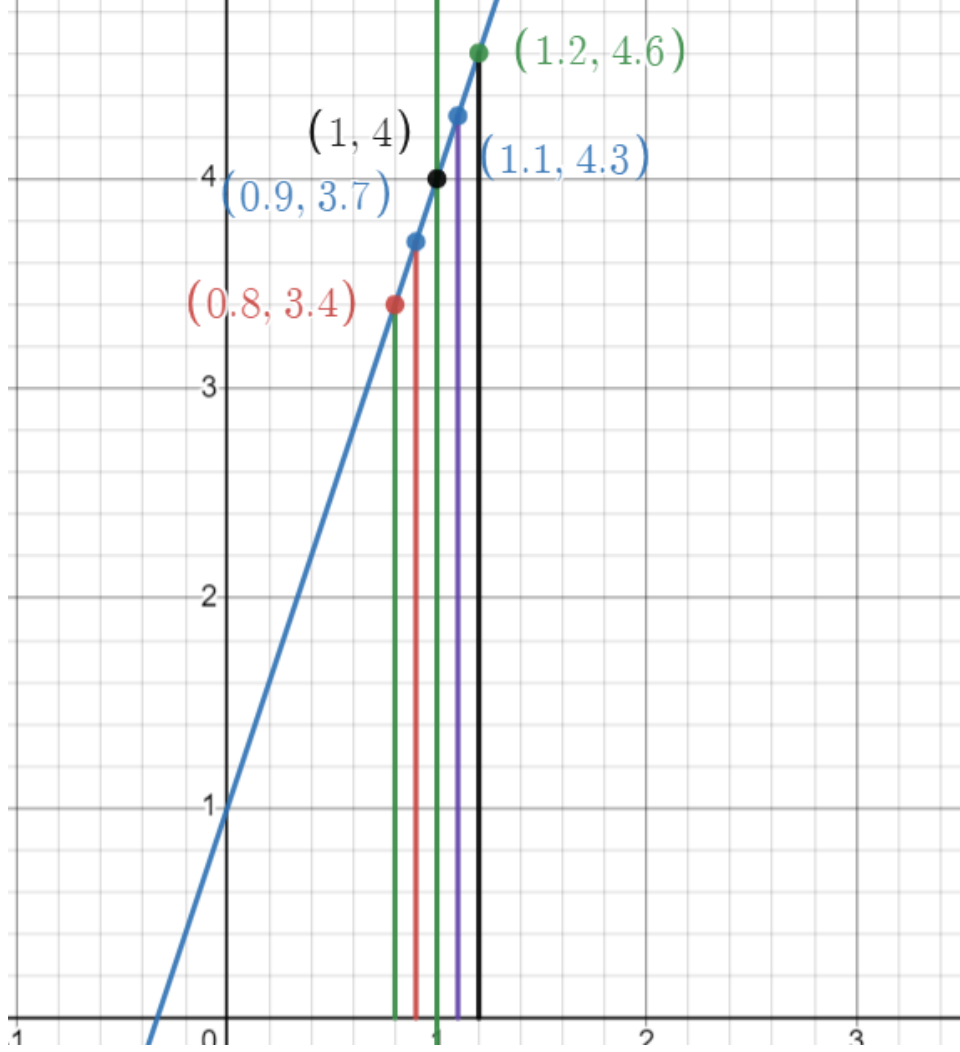


Limit

$A \subseteq \mathbb{R}$, $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. $\forall \epsilon, \exists \delta$ falan filan... Bu tanım çok karışık, şimdilik. Bu kavramı sezgisel tanıma çalışsaydık şu görseli kullanırdık:



Bu görselde $y = 3x + 1$ denkleminin grafiğini görüyorsunuz. Bu grafiğin $x = 0.8$ noktasındaki değeri $y = 3.4$ olmaktadır. Aynı şekilde 0.9, 1.1, 1.2 için aldığı değerleri de görselden takip edebilirsiniz. Bunu bu şekilde devam ettirerek $x = 1$ noktasına yaklaştığımızda hangi değeri elde edebileceğimizi ön görebiliriz. Buradaki sorun şu ki matematikte hiçbir zaman “...bunu bu şekilde sürdürerek...” şeklinde bir tanım yapamazsın. Örneğin çember nedir? Kimi yuvarlak der, kimi sonsuz köşeli düzgün çokgen der, kimisi düzgün yuvarlak der. Bunlardan hiçbiri çemberi tanımlamaz. Çemberin tanımı şudur:

Düzlemde, sabit bir noktaya eşit uzaklığı bulunan noktalar kümesi.

Bu tanım açık ve nettir. Tanımdaki sabit noktaya merkez adını veriyoruz ve gerçekten de çember üzerindeki noktalara *yarıçap* adını verdiğimiz bir uzunluk kadar uzaklıktaki

noktalardan oluşuyor. Tanımdan “Düzlemden” kelimesini çıkarırsak kürenin¹ tanımını elde ederiz. O yüzden tanımdaki her bir ifadeye ihtiyacımız var. Peki limitin tanımını bu kadar net nasıl yapabiliriz? Öncelikle bazı alıştırmalar yapalım.

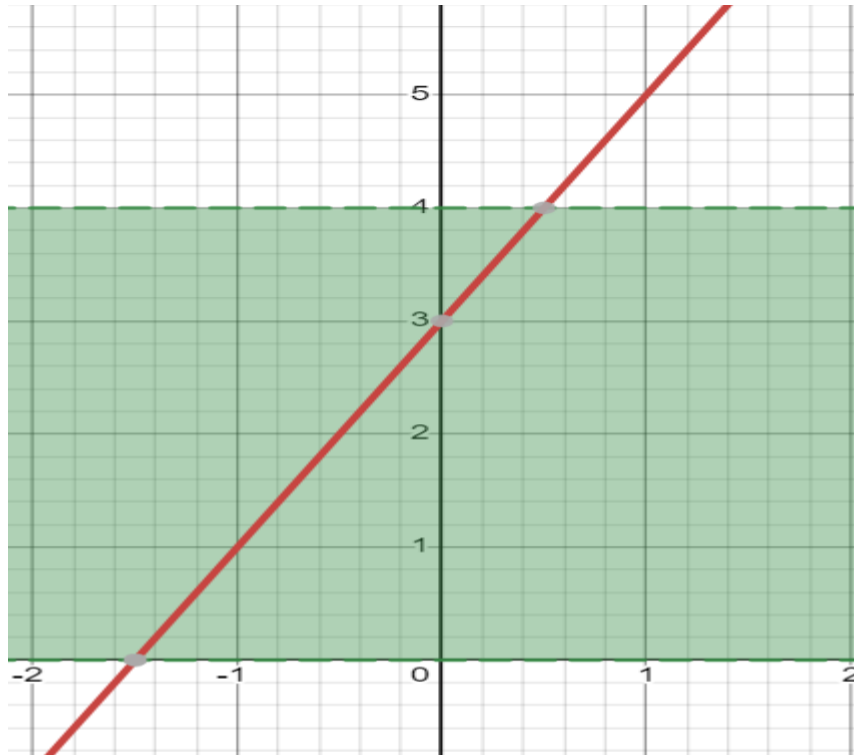
Problem 1:

$y = f(x) = 2x + 3$ fonksiyonunu ele alalım. $0 < y < 4$ olacak şekilde bir $a < x < b$ aralığı bulabilir misin?

Cevap: Hem de bir sürü. Öncelikle oturup soruyu anlamaya çalışalım. $y = 0$ olabilmesi için $x = -3/2$ olması gerekir. Aynı şekilde $y = 4$ olabilmesi için $x = -1/2$ olması gerekir. Bunlar sınır değerler idi, farklı bir elemanı da inceleyebirdik.

$I = (-3/2, -1/2)$ aralığı sorunun istediği özelliği sağlıyor. I aralığından bir eleman seçerek bunu sağlayabiliriz. Örneğin $x = -1$ alırsak $y = 1$ elde ederiz.

$-1 \in I$, $1 \in (0, 4)$ olduğundan istenilen durum sağlandı. I aralığının herhangi bir alt kümesi de bu özelliği sağlar. Bunun için $J = (-1, -1/2)$ alalım. J aralığı içerisindeki her noktanın f altındaki görüntüsü $(0, 4)$ aralığının içinde mi? Evet. Dolayısıyla herhangi bir problem yok. Bunun gibi sonsuz küme bulabiliriz bu özelliği sağlayan.

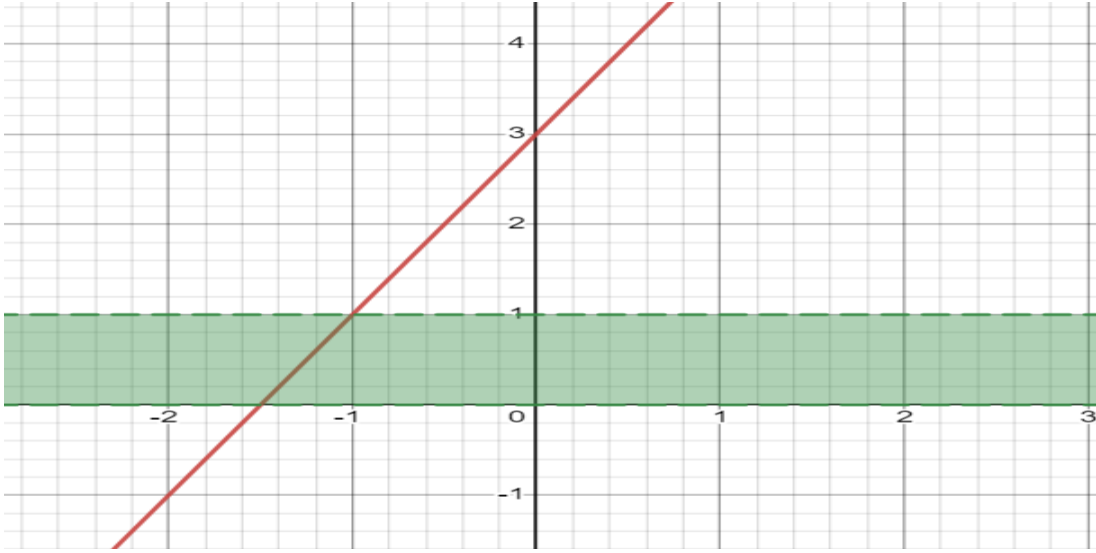


(Problem 1)

Problem 2:

$y = f(x) = 2x + 3$ fonksiyonunu ele alalım. Peki bu sefer $0 < y < 1$ olacak şekilde bir $a < x < b$ aralığı bulabilir misin? Aralık küçüldü fakat cevap yine evet! Hem de sonsuz tane küme bulabiliriz. Çözümü yukarıdaki ile aynıdır, okuyucuya bırakılmıştır. Bu durumda $L = (-3/2, -1/2)$ aralığının alt kümelerinin istenilen özelliği sağladığını gözlemleyin.

¹ Aslında küre elde etmeyiz. Hangi metrikten bahsettiğimize göre farklı şekiller elde edebiliriz. Fakat genelde belirtme yapmadığımızda Öklid metriğini anlarız. Yani standart 2 ve 3 boyutlu geometrileri...



(Problem 2)

Problem 3:

$y = f(x) = 2x + 3$ fonksiyonunu ele alalım. $0 < y < 0.0001$ olacak şekilde bir $a < x < b$ aralığı bulabilir misin? Aralık iyice küçüldü fakat cevap yine evet! Bu durumda şunun sezgisini kazandırmış olmalıyız: *Aralığı ne kadar küçültürsek küçütelim öyle bir $a < x < b$ buluruz ki $0 < y < \varepsilon$ olur.* Aralığı büyütürsek n olur? Hiçbir şey, bu pek ilginç olmazdı.



Bu üç problem içerisinde y 'nin aralığını ufalttığımızda sınır değerlerinin y 'ye yaklaştığını, aynı şekilde x 'in sınır değerlerinin x 'e yaklaştığını fark edelim. Bu bize limit tanımı için bir ipucu veriyor.

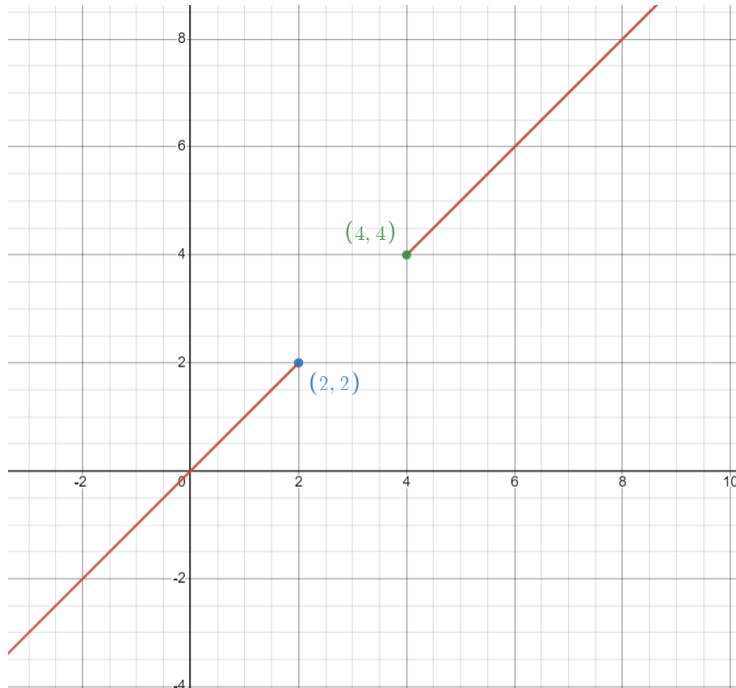
Çözmemiz gereken soru şu:

$|y - L| < \varepsilon$ olacak şekilde $0 < |x - a| < \delta$ eşitsizliğini de sağlayan bir δ sayısı var mıdır? Soru yine aynı, sadece şekil değişti. Yukarıda $0 < y < 4$ olan eşitsizliği $|y - 2| < 2$ şeklinde yazarsak ve I aralığını da $0 < |x + 1| < 1/2$ olarak düzenlersek aynı şeyden bahsettiğimizi rahatlıkla anlarız. Peki aralığı küçültmeyi nasıl tanımlayacağız? Cevap basit: Küçültmeyeceğiz! Aynı anlama gelen bir terim kullanacağız.

Tanım

$A \subseteq \mathbb{R}$, $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için $0 < |x - a| < \delta$ ise $|y - L| < \varepsilon$ önermesini sağlayan öyle en az bir $\delta \in \mathbb{R}$ varsa f 'nin a 'da bir limiti vardır denir ve kısaca $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ şeklinde gösterilir. Tanımda $x = a$ koşulunun

yasaklandığına² dikkat edin. Çünkü $x = a$ noktası ile değil; x , a 'ya yaklaşırken neler oluyor onunla ilgileniyoruz. Tanımda ε değeri bariz bir şekilde küçülüyor. Burada onun yerine \forall (her) niceleyicisini kullanıyoruz. Eğer bu önerme her ε pozitif reel sayısı için sağlanıyorsa küçük olanlar için de sağlanır elbette. Büyük epsilon değerleri ne olacak peki? Bu durum bizim için önemsiz olacak, çünkü büyük epsilonlar için ortada ilginç bir şey yok. Örneğin $y = x$ fonksiyonu için $|y| < 10000000000$ sonucu veren $|x| < \delta$ aralıklarını bulabilir misin? Elbette bulabilirsin! Dolayısıyla burada pek ilginç bir şey yok. Dolayısıyla tanımda küçük epsilonlar için deltalar bulmaya çalışıyoruz. Böyle bir δ her zaman olmayabilir. Bu durumda limit yok deriz.

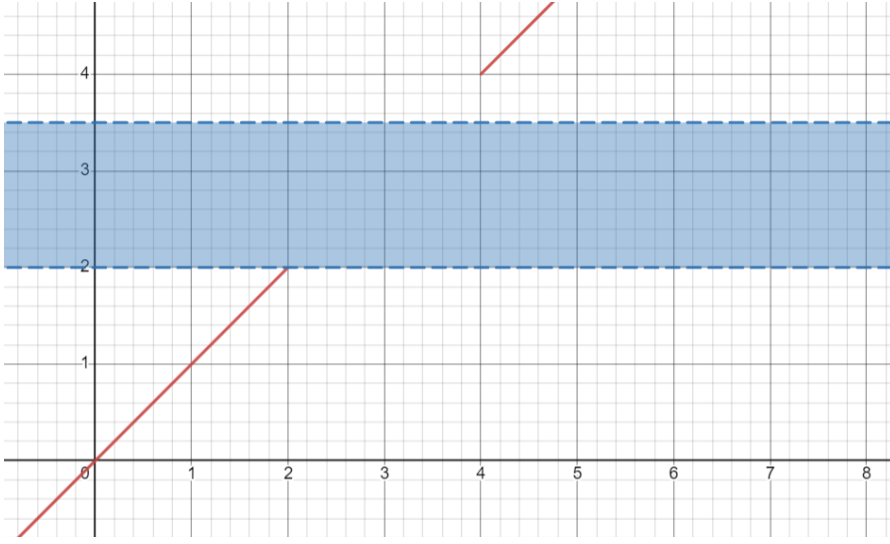


Görseli takip edin. $\forall \varepsilon, 0 < |x - 2| < \delta \rightarrow |y - 2| < \varepsilon$ önermesini sağlayan bir δ var mıdır? Cevap hayır! $0 < |y - 2| < \varepsilon$ ifadesini açalım:

$$-\delta + \varepsilon < x < \varepsilon + 2$$

Son eşitsizlikte $2 < y < \varepsilon + 2$ olacak şekilde bir y seçelim.

² Çünkü $0 < x - a$ olmak zorunda.



Gördüğümüz bu aralıkta fonksiyon tanımsız olduğundan hiçbir δ sayısı için $0 < |x - 2| < \delta$ eşitsizliği, $|y - 2| < \varepsilon$ eşitsizliğini gerektirmiyor. Dolayısıyla o noktada limit yoktur.