Düğüm Polinomları Çalışma Notları

Murat Rüzgar Poyraz

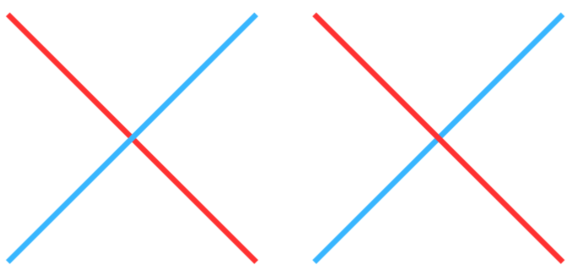
Şubat 2025

1 X-Polinomlar

Düğümleri ayırmak için polinomları kullanmayı deneyeceğiz. Amacımız ise öyle bir polinom bulmak ki her düğüm için bu polinomlar farklı olsun. Bir anlamda düğümler için bir **değişmez** tanımlamak istiyoruz. Bunu yapmamızın çok önemli bir nedeni ise düğümlerin bazen çözülemeyecek kadar karmaşık olmasıdır. Eğer iki düğümün polinomları aynı olursa denk olduklarını onları çözmeden anlayabiliriz. Bu amaçla ilk polinomumuzu tanımlayalım. O, çözük notu temsil etsin:

$$P(O) := 1$$

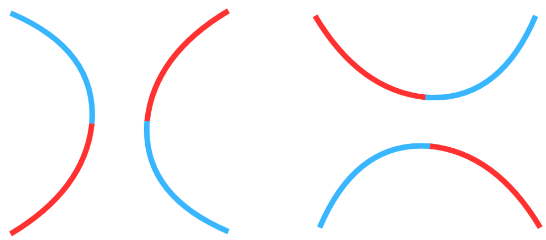
Bu oldukça basit bir tanım oldu. Bir yerden başlamamız gerekiyordu ve onu bu şekilde seçtik. Elbette başka birisi bu polinomu $P(O) = 2$ olarak da seçebilirdi ama biz karmaşık hesaplardan uzaklaşmak için 1 gibi basit bir sayı seçeceğiz. Olabilecek en basit düğüme tanımımızı verdiğimize göre daha karmaşık düğümlerin nasıl tanımlanacağına dair tartışabiliriz. Karmaşık düğümleri bir şekilde çözük hale getirebilirsek istediğimizi elde ederiz fakat Reidemaister hareketleri ile imkansız olabilir çoğu düğüm için. O halde daha az kesişim sayılı bir düğüm elde etmemiz için düğümü ikiye yarmamız gerekecek. Böylece kesişim sayısını azaltarak çözük düğüme gelebilir, en sonunda da yineli bir şekilde polinomu hesaplayabiliriz. Bir kesişim, diyagramda iki şekilde belirebilir:



(a) Kesişim 1 (K_1) (b) Kesişim 2 (K_2)

"Peki ya, kırmızı düğümün sağa yatık olduğu durumlar ne olacak?" dediğinizi duyar gibiyim. Geometrik olarak yine bu iki durum ortaya çıkardı, nitekim düğüme bu sefer arkadan bakmış olurduk.

Şimdi kesme işlemini yapalım. Kesişimin olduğu bölgeyi makasla kesip düğümleri aşağıdaki gibi tekrar birleştirdiğimizi düşünelim:



(a) Vertical (V) (b) Horizontal (H)

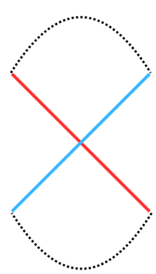
Artık daha az kesişim sayılı iki düğümümüz var. Burada olabilecek her senaryoyu hesap etmemiz gerekiyor. Yani kırmızının ve mavinin üstte olduğu iki durum için belli bir tanımımız olması gerekiyor. Bunun için polinom hesabını ikiye ayıracağız. Bir K kesişiminin (a)'daki gibi dikey kesildiğinde oluşan düğüme V_K ve (b)'deki gibi yatay olarak kesilince oluşan düğüme H_K diyelim. A, B polinomun rastgele katsayıları olsun. O halde K_1 ve K_2 kesişimleri ile verilen yeni polinomumuz:

$$P(K_1) = A(P(V_{K_1})) + B(P(H_{K_1}))$$
$$P(K_2) = A(P(H_{K_2})) + B(P(V_{K_2}))$$

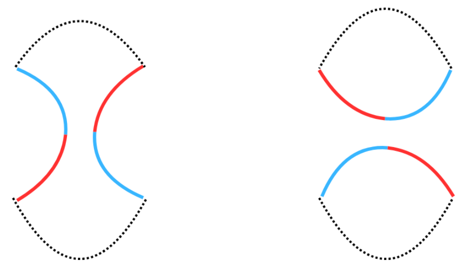
olarak verilebilir. Buradaki ikinci eşitlik, birincinin tıpatıp aynısı, sadece 90 derece döndürülmüş hali. Peki biz bu kesme işlemini yaparken tek başına düğümlerle mi uğraşıyoruz? Hayır. Aynı anda bu işlemleri **bağ** adı verilen, birden fazla düğümden oluşan bir sistem için de yapacağız. O yüzden Bağlar için de bir kural koymamız gerekecek. Öncelikle bu kesme işleminin bağ yarattığını kanıtlayalım.

Önsav 1. *Bir düğümü kesme işlemini yukarıdaki gibi tanımlayalım. Bu kesme işlemi bize bir düğüm ve bir bağ verir.*

Kanıt. K_1 kesişimi üzerinden gidelim, kanıt K_2 için aynı. Kesişimin devamını aşağıdaki gibi resmedelim. Noktalı kısımlar düğümün görünmeyen tarafını ifade



ediyor. Noktalı kısımların nasıl davrandığını bilmiyoruz, o yüzden düğüm kesildikten sonra elde edilen düğüm veya bağlar hakkında da bir bilgimiz yok. Bu şekil üstünde kesme işlemini yapalım:



(a) Vertical (V) (b) Horizontal (H)

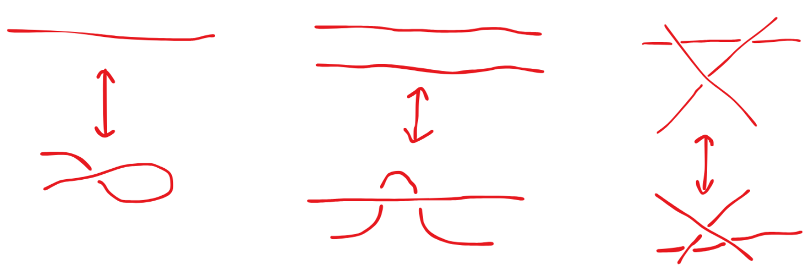
Görüldüğü üzere bu işlem bize bir bağ ve bir düğüm verdi. Verilen bağ, şekildeki gibi ayrık olmak zorunda değildir elbette. □

O halde artık polinom tanımını bağlar için de yapmalıyız. L herhangi bir bağ veya düğüm olmak üzere $L \cup O$, iki düğümün bir arada bulunduğu durumu temsil etsin. O halde bir C için:

$$P(L \cup O) = C(P(L))$$

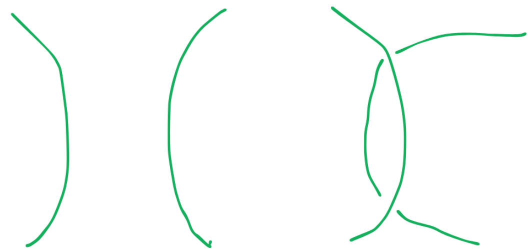
olsun. Polinom inşa etme kısmını buraya kadar tamamladık. Şimdi bu polinomun iyi tanımlılığına bakalım. Yani denk düğümler için bu polinom nasıl değişiyor. Bunun için Reidemeister hareketlerinin üzerindeki etkisine bakacağız.

Reidemeister Hareketleri: Düğümün belli bir parçasına aşağıdaki dönüşümler uygulandığında düğümler denk kalır.



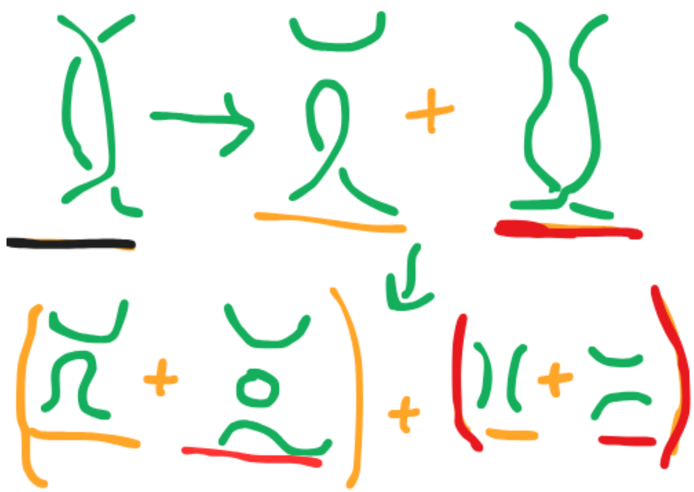
(a) Birinci Reidemeister Hareketi (b) İkinci Reidemeister Hareketi (c) Üçüncü Reidemeister Hareketi

Reidemeister hareketlerini hatırladıysak ikinci hareketin polinomdaki etkisine bakalım. Bunun için şu iki düğümün polinomunun denk olmasını istiyoruz:



(a) Hal 1 (b) Hal 2

O halde "Hal 2" ile gösterilen kesişime kesme işlemi uygulayalım: Şekilden



takip ediniz. Sol yukarı baştan başlayarak okları takip edelim. Hal 2'de iki adet kesişim gözlemliyoruz. Önce yukarıdaki kesişime kesme işlemi uygulayalım. Düğümlerin altındaki turuncu çizgiler A katsayısını, kırmızı çizgiler ise B katsayısını gösteriyor. Şimdi A ve B katsayılı yeni polinomlara karşılık gelen düğümlere kesme işlemi uygulayarak alttaki şekle ulaşalım. Burada turuncu parantez, işlem yapıldıktan sonra A katsayısını soldan dağıtacağımız anlamına geliyor. Aynı şekilde kırmızı parantezde B katsayısını dağıtacağız. İkinci satırdaki soldan ikinci bileşende üç adet bileşen bulunmakta, bunun için yukarıda tanımladığımız C katsayısını devreye sokacağız. Hal 1 ve Hal 2 düğümlerini sırasıyla S_1 ve S_2 diyelim. Hesabımız sonucunda,

$$P(S_1) = A(AP_1 + BCP_1) + B(A(P(S_2)) + BP_1)$$

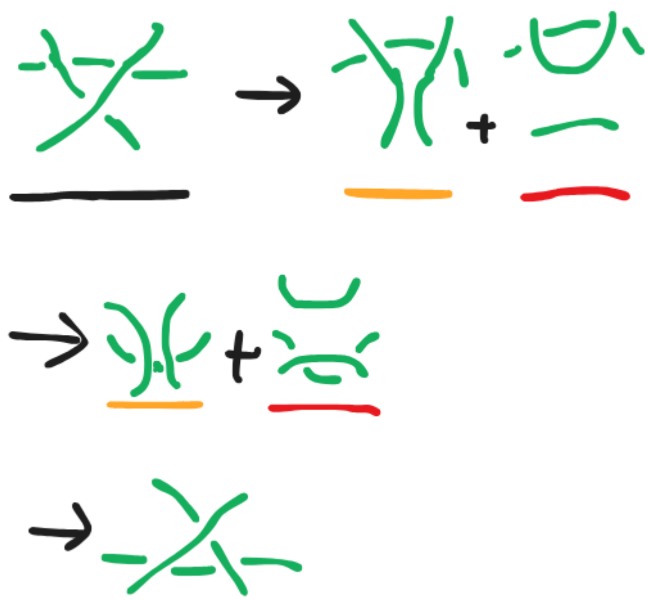
elde ederiz. Burada P_1, ara işlemlerdeki düğümlerin polinomuna denk geliyor. Bu hesabın sonucunun $P(S_2)$ olmasını istiyoruz. O halde,

$$P(S_2) = A^2P_1 + ABCP_1 + BA(P(S_2)) + B^2P_1$$

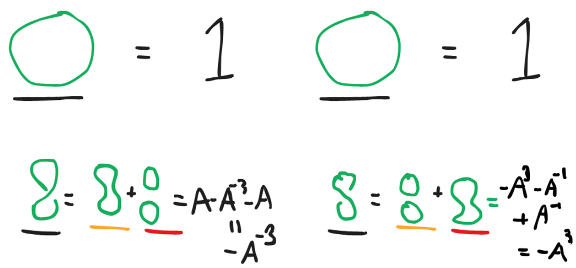
eşitliği sağlanmalı. Polinom eşitliği gereğince $B = A^{-1}$ buluruz. Ayrıca P_1 polinomunun katsayıları 0 olmalı. O yüzden $A^2 + ABC + B^2 = 0$ olmalı. Son eşitlikte B yerine A^{-1} yazarsak $C = -A^{-2} - A^2$ buluruz. Böylece katsayı problemini de büyük ölçüde hallettik. Artık yeni tanımımız şöyle:

- $P(O) = 1$
- $P(K_1) = A(P(V_{K_1})) + A^{-1}(P(H_{K_1}))$
  $P(K_2) = A(P(H_{K_2})) + A^{-1}(P(V_{K_2}))$
- $P(L \cup O) = (-A^{-2} - A^2)P(L)$

Şimdi bu yeni tanımı birinci ve üçüncü hareketlere uygulamaya çalışacağız. Bunun için bu yeni tanımın ikinci hareketle bozulmadığı sonucunu kullanabiliriz.



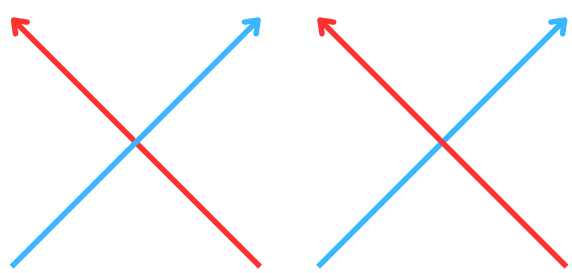
Yukarıdaki şekilden takip edebilirsiniz. İkinci Reidemeister hareketinin polinomu bozmadığından yararlanarak kolayca üçüncü hareketin de bu tanımlar altında polinomu bozmadığını söyleyebiliriz. Fakat birinci tip Reidemeister hareketinde ufak bir sıkıntı var. Örneğin çözük için birinci hareket uygulanıp



(a) Hal 1 (b) Hal 1

polinom hesaplanırsa bu hesap tutmuyor. Hatta görsellerdeki gibi denk düğümler için 3 farklı polinom buluyoruz. Her bir polinom arasında $-A^{-3}$ kadarlık bir değişim gözlemleyebiliriz. Yani birinci hareket uygulanırsa iki denk düğüm arasında $-A^{-3}$ teriminin bir tam kuvveti kadar bir değişim oluyor. Artık polinomu tanımlarken bunu da göz önünde bulundurmamızç gerekiyor.

Kolayca gözlenebileceği üzere eğer birinci tip hareket K_1 gibi bir kesişim oluşturursa $-A^3$, K_2 gibi bir kesişim oluşturursa $-A^{-3}$ kadarlık bir değişim sağlıyor. O halde düğümdeki her K_1 tipi kesişim için polinomu bir kere $-A^{-3}$ terimi ile, her K_2 tipi kesişim içi polinomu bir kere $-A^3$ ile çarpalım. Böylece aradaki dengeyi sağlamış olduk. Fakat bunu yapmadan önce düğüme bir yön verelim, zira kesişim tipleri aynı kalsa da yönlendirmelerle birlikte bakış açısını sıfırlayalım. Artık yeni tanımlar yapabiliriz.



(a) R_1 (b) R_2

$$w(L) = (\sum_{R_1} 1) - (\sum_{R_2} 1)$$

Bu tanımladığımız yeni sayı, L polinomundaki her R_1 tipi yönlü kesişim için 1, her R_2 tipi yönlü kesişim için -1 eklenerek oluşturuluyor. K bir düğüm olmak üzere başta tanımlamak istediğimiz düğümün polinomuna $X(K)$ diyelim ve

$$X(K) = -A^{-w(K)}(P(K))$$

tanımını yapalım. Bu yeni polinom; ne birinci, ne ikinci, ne de üçüncü Reidemeister hareketleri ile bozulur. O halde X-polinomları, düğümler için bir değişmez belirtir.